4 Práctico 4: Espacios Vectoriales. Subespacios.

4.1 Espacios Vectoriales

1. En los siguientes casos, decidir si V es un K-espacio vectorial.

   (a) $V = \{P \in K[X] : gr(P) \leq n\} \cup \{0\}$ con la suma de polinomios y el producto de un polinomio por un escalar.

   (b) $V = \mathbb{Z}$ (los números enteros) $K = \mathbb{Q}$ (los números racionales) con la suma y el producto usual.

   (c) $V = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ (los números reales) con la suma y el producto usual.

   (d) $V = \{A \in K^{n\times n} : {}^tA = A\}$ con la suma de matrices y el producto de un número por una matriz.

2. En los siguientes casos decidir si los vectores $v_1, \ldots, v_r$ de V son linealmente dependientes. En caso afirmativo extraer un subconjunto de vectores linealmente independientes y expresar los restantes como combinación lineal de éstos.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$,

   $$v_1 = (1,1,0) \qquad v_2 = \quad (0,2,3) \qquad v_3 = (1,2,3) \qquad v_4 = (3,6,6)$$

   (b) $V = \mathbb{R}^3$,

   $$v_1 = (1,1,0) \qquad v_2 = (3,4,2)$$

   (c) $V = \mathbb{R}^4$,

   $$v_1 = (1,0,1,0) \qquad v_2 = (0,1,0,1) \qquad v_3 = (0,0,0,0)$$

   $$v_4 = (2,2,2,2) \qquad v_5 = (a,-b,a,-b)$$

   (d) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

   $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

   (e) $V = \{p \in K[x] : p = 0 \text{ ó } gr(p) \leq 2\}$,

   $$v_1 = p(x) = 2x^2 + x + 1 \quad v_2 = g(x) = 3x^2 + x - 5 \quad v_3 = h(x) = x + 13$$

3. En los siguientes casos los vectores $v_1, \ldots, v_n$ y v vienen dados por sus coordenadas en alguna base de V. Comprobar que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y hallar las coordenadas de v en esta base.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,2,3)$, $v = (a,b,c)$

(b) $V=\mathbb{R}^3$, $v_1=(2,1,-3)$, $v_2=(3,2,-5)$, $v_3=(1,-1,1)$, $v=(a,b,c)$

(c) $V=\mathbb{R}^4$, $v_1=(1,2,-1,-2)$, $v_2=(2,3,0,-1)$, $v_3=(1,2,1,4)$, $v_4=(1,3,-1,0)$, $v=(a,b,c,d)$

4. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\{(1,1,1),(1,2,2),(1,3,3)\}$

   (b) $\{(1,0,1),(1,-1,1),(3,5,3),(2,3,2)\}$

5. Probar que si A es una matriz $n\times n$ inversible y $v_1,\ldots,v_k$ son LI en $\mathbb{R}^n$, entonces $\{Av_1,\ldots,Av_k\}$ también son LI.

6. Si u, v, $w\in\mathbb{R}^n$ son LI, probar que $\{u+v,\ v+2w,\ -u+v+w\}$ también son LI

4.2 Cambio de base

1. Dadas las bases B y $B\prime$ de V hallar la matriz de cambio de base en los siguientes casos:

   (a) $V=\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} B &= \{(1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\} \\ B\prime &= \{(3,1,4),(5,2,1),(1,1,-6)\} \end{aligned}$$

   (b) $V=\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} B &= \{(1,0,3,3),(-2,-3,-5,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4)\} \\ B\prime &= \{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3)\} \end{aligned}$$

   (c) $V=\{p\in K[x]: p=0 \text{ ó } gr(p)\leq 4\}$:

$$\begin{aligned} B &= \left\{1,x,x^2,x^3,x^4\right\} \\ B\prime &= \left\{1,(x-\alpha),(x-\alpha)^2,(x-\alpha)^3,(x-\alpha)^4\right\} \end{aligned}$$

4.3 Subespacios

1. Decidir en cada caso si S es un subespacio de V.

   (a) $S=\{P\in K[X]: gr(P)\,\text{es par}\}$; $V=K[X]$.

   (b) $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2=y^2\right\}$; $V=\mathbb{R}^2$.

   (c) $S=\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix}: b=a+c\}; V=K^{2\times 2}$.

   (d) $S=\{A\in M_n(K): a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=0\}$; $V=K^{n\times n}$.

   (e) $S=\{(a,b,1): a,b\in K\}; V=K^3$.

(*f*) $S = \{(a,b,0) : a,b \in K\}; V = K^3$.

2. ¿Alguno de los siguientes conjuntos son subespacios?

   (*a*) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=1\right\}$

   (*b*) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = s\,(2,1,1) + t\,(1,2,1)\right\}$

3. En los siguientes casos, hallar una base del subespacio S de V definido por un sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

   (*a*) $V = \mathbb{R}^3$, S el conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (*b*) $V = \mathbb{R}^5$, S el conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (*c*) $V = \mathbb{R}^5$, S el conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Dado el subespacio S de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2,0,1)$ y $(-1,0,1)$. Encontrar un vector v que no esté en S y mostrar que $\{(2,0,1), (-1,0,1), v\}$ es una base de R^3.

5. Caracterizar geométricamente los subespacios de $\mathbb{R}^3$. ¿Qué conclusiones se obtienen para los sistemas lineales homogéneos en tres variables?

6. Si A es $m \times n$, probar que:

   (*a*) $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se denomina el *núcleo* de A y se nota $Nu\,(A)$

   (*b*) $\{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y$ para algún $x \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$: se denomina *subespacio columna* o *subespacio imagen* de A.

7. Si A es $n \times n$, probar que $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 3x\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Interpretar geométricamente

8. A continuación se presenta un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ dado por sus generadores. Hallar en cada caso un sistema de ecuaciones que determine S, una base de S y las coordenadas de un vector $(x_1, \ldots, x_n)$ de S en la base encontrada:

   (a) $S = \langle (1,0,0),(2,1,1),(1,1,1),(1,2,3) \rangle$

   (b) $S = \langle (1,-1,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1) \rangle$

   (c) $S = \langle (1,1,1,1,0),(-1,-1,1,1,1),(2,2,0,0,1),(1,1,5,5,2),(-1,1,1,0,0) \rangle$

9. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y = 0 \text{ para todo } y \in S\}$ es un subespacio que se denomina el complemento ortogonal de S y se nota $S^{\perp}$. ¿Cuál es el complemento ortogonal en $\mathbb{R}^3$ del plano xy?

10. Dar una base para el complemeto ortogonal del subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,-1,1)$ y $(1,1,2,3)$.

11. Sean S, T dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. Se define una intersección como $S \cap T = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in S, x \in T\}$. Probar que $S \cap T$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Análogamente se define la unión $S \cup T = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in S \text{ ó } x \in T\}$. Decidir si es el mismo es o no un subespacio.

12. Los subespacios S y T se presentan por sus generadores en $\mathbb{R}^n$. Hallar sistemas de ecuaciones y bases para $S+T$ y $S \cap T$ respectivamente:

   (a) $\begin{array}{l} S = \langle (1,2,0,1),(1,1,1,0) \rangle \\ T = \langle (1,0,1,0),(1,3,0,1) \rangle \end{array}$

   (b) $\begin{array}{l} S = \langle (1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3) \rangle \\ T = \langle (2,3,-1),(1,2,2),(1,1,-3) \rangle \end{array}$

13. Hallar generadores del subespacio $S \cap T$ y describirlo geométricamente

   (a) $S = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle$, $T = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle$

   (b) $S = \langle (1,0,-1),(1,2,3) \rangle$, $T = \{x : x - y - z = 0\}$

14. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S_1 = \{(x,y,z,t) \,/ x + y - z + t = 0\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z,t) \,/ x - y - z - t = 0\}$$

   obtener la dimensión de $S_1 + S_2$.

15. Si S y T son subespacios de V, tales que $\dim(S) + \dim(T) > \dim(V)$, mostrar que $S \cap T \neq \{0\}$.

16. Dados los subespacios S y T de V decidir si $S+T$ es suma directa y en que casos es $V = S \oplus T$.

(a) $V = \mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$$
$$T = \langle(1, 1, 1)\rangle$$

(b) $V = \mathbb{R}^4$:

$$S = \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$
$$T = \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + 2y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

(c) $V = \mathbb{R}^n$:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$
$$T = \langle(1, 1, 0, \ldots, 0), (1, -1, 0, \ldots, 0)\rangle$$

17. Sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores unitarios y *mutuamente ortogonales* de $\mathbb{R}^n$:

    (a) Probar que son LI

    (b) Si $k = n$, probar que forman una base de $\mathbb{R}^n$

    (c) Dado un vector arbitrario $u \in \mathbb{R}^n$, obtener explícitamente las coordenadas de u en dicha base

    (d) Deducir de la respuesta anterior que $u = proy_{v_1} u + \ldots + proy_{v_n} u$

4.4 Rango

1. ¿Cuál es la dimensión del subespacio de soluciones de los siguientes sistemas?

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 10x - 4y - 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 4x - y - z = 0 \\ x + y + 10z = 0 \end{cases}$$

4.5 Aplicación. Cadenas de Marcov.

1. La siguiente imagen refleja la migración anual entre dos partes de la región metropolitana

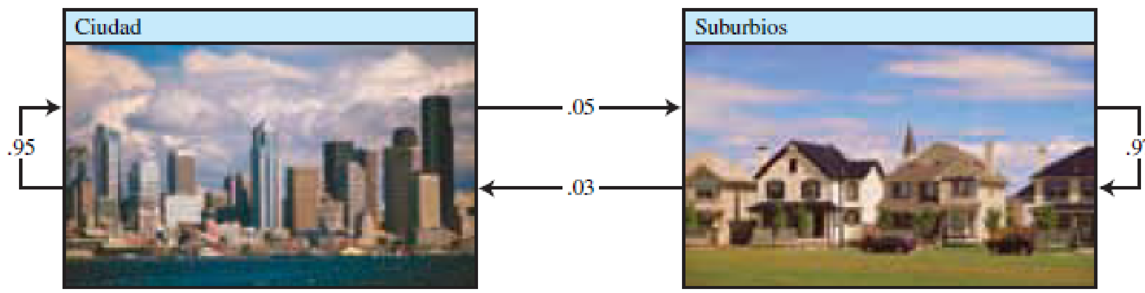

FIGURA 1 Porcentaje anual de migración entre la ciudad y los suburbios.

gobernada por la *matriz de migración* M:

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \text{Ciudad} & \text{Suburbios} \end{array} & \text{A} \\ \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{Ciudad} \\ \text{Suburbios} \end{array} \end{array}$$

Esto es, cada año el 5% de la población de la ciudad se muda a los suburbios y el 3% de la población de los suburbios se muda a la ciudad. Suponga que la población de la región en el año 2000 es de 600000 habitantes en la ciudad y 400000 en los suburbios. ¿Cuál es la distribución de la población en 2001?¿En 2002?

2. Suponga que los resultados de la votación en una elección al congreso estadounidense en cierto distrito electoral están representados mediante un vector en $\mathbb{R}^3$

$$x = \begin{bmatrix} \text{porcentaje que vota por los demócratas } (D) \\ \text{porcentaje que vota por los republicanos } (R) \\ \text{porcentaje que vota por los libertarios } (L) \end{bmatrix}$$

Supongase que se registran los resultados de la elección al congreso cada dos años mediante un vector de este tipo y que el resultado de una elección depende solamente de los resultados de la elección anterior. Entonces la sucesión de vectores que describe los votos cada dos años puede ser una cadena de Marcov. Para esta cadena se toma

$$P = \begin{bmatrix} \text{D} & \text{R} & \text{L} & \text{A:} \\ .70 & .10 & .30 & \text{D} \\ .20 & .80 & .30 & \text{R} \\ .10 & .10 & .40 & \text{L} \end{bmatrix}$$

Las entradas incluidas en la primera columna, etiquetada como D, describen lo que las personas que votan por demócratas en una elección harán en la siguiente elección. Aquí se ha supuesto que el 70% de las personas votará D nuevamente, el 20% votará R y un 10% votará L. Para las demás columnas de P se proporciona una interpretación similar. A continuación se representa un diagrama para esta matriz.

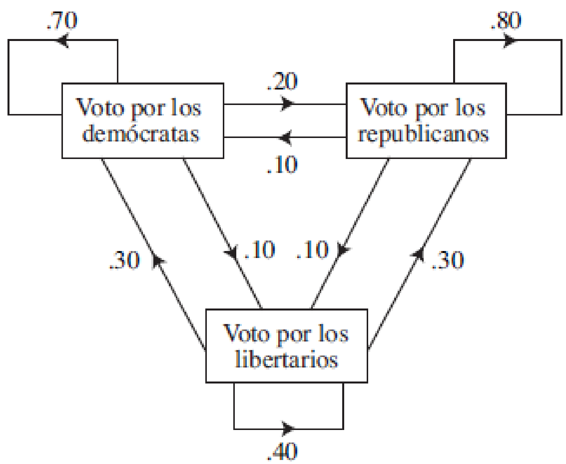

FIGURA 2 Cambios de preferencia de una elección a la siguiente.

Suponga que en una elección los resultados están dados por

$$x_0 = \begin{bmatrix} .55 \\ .40 \\ .05 \end{bmatrix}$$

y que los porcentajes de transición permanecen constantes durante muchos años. Determine el resultado probable para la siguiente elección y para la elección sucesiva.