3 Trabajo Práctico 3: Rango. Sistemas de Ecuaciones. Factorización LU.

3.1 Rango

1. Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & b & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & c & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 5 \end{bmatrix} \; a, b, c, d \neq 0$$

2. En las siguientes matrices analizar el rango según el valor de α

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

3.2 Sistemas de Ecuaciones

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por la Regla de Cramer, caracterizando el conjunto de soluciones:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - 2y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{array} \right. \qquad (d) \left\{ \begin{array}{l} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0 \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0 \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0 \end{array} \right.$$

2. Transformar en matrices escalón reducidas las siguientes matrices:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & 10 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

3. Usando operaciones elementales, hallar la solución general de los siguientes sistemas $Ax = b$.

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{l} 3x - 6y - z + t = 4 \\ -x + 2y + 2z + 3t = 3 \\ 4x - 8y - 3z - 2t = 3 \end{array} \right.$$

4. Elegir λ de tal modo que cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tengan solución:

$$(a)\quad \begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4\,t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = \lambda \end{cases} \qquad (b)\quad \begin{cases} \lambda\, x + y + z = 1 \\ x + \lambda\, y + z = 1 \\ x + y + \lambda\, z = 1 \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} (1+\lambda)\, x + y + z = 1 \\ x + (1+\lambda)\, y + z = 1 \\ x + y + (1+\lambda)\ z = 1 \end{cases}$$

5. Determinar para que valores de k el siguiente sistema tiene soluciones distintas de la trivial:

$$\begin{cases} x + (k+1)\, y + z = 0 \\ x + y + (k+1)\, z = 0 \\ (k+1)\, x + y + z = 0 \end{cases}$$

En cada caso, estudiar el espacio solución e interpretar geométricamente.

6. Encontrar la solución general de $Ax = b$ ó, equivalentemente, determinar si es posible escribir a b como combinación lineal de las columnas de A. Escribir en cada caso las matrices elementales que producen las operaciones elementales realizadas para escalonar:

$$(a)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(b)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

7. Suponga que los tres puntos $(1,-5)$, $(-1,1)$ y $(2,7)$ están en la parábola $y\,(x) = ax^2 + bx + c$. Hallar a, b y c.

8. Analizar el siguiente sistema para los distintos valores de α:

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + z = -2\alpha + 5 \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 4x + y - \alpha z = \alpha \end{cases}$$

9. Determinar todos los valores de a para los que el sistema lineal resultante

   (a) no tenga solución $\quad (b)$ tenga solución única $\quad (c)$ tenga infinitas soluciones

   $$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+\left(a^2-5\right)z=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+2z=5 \\ 2x+3y+\left(a^2-1\right)z=a+1 \end{cases}$$

10. El vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$?

11. De ser posible, determinar escalares c_1, c_2 y c_3, no todos nulos, de modo que

   $$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12. Decidir en cada caso si el vector $b \in \mathbb{R}^4$ es *cl* de los vectores, $(1,0,1,-2)$, $(0,-1,0,1)$, $(1,-2,1,0)$ para

   $(a)\ b=(1,1,1,1)^t \quad (b)\ b=(1,-1,1,-1)^t \quad (c)\ b=(1,1,0,2)^t$

   Para los casos *compatibles*, verficar que $rg\,[A|b] = rg\,[A]$.

13. Encontrar cuando corresponda las condiciones que debería cumplir un vector b para que el sistema $Ax=b$ tenga solución y hallar $rg\,(A)$ en cada caso:

   $(a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \quad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

14. Hallar las condiciones para que un vector arbitrario b pertenezca a los siguientes conjuntos:

   (a) $S = \langle (-1,2,1), (2,-4,-2) \rangle$

   (b) $S = \langle (1,0,1,1), (0,1,1,2), (1,1,1,0) \rangle$

15. Dar un sistema de ecuaciones lineales (ecuaciones cartesianas) para los siguientes planos de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $S = \{ s(-1,2,1) + t(2,4,-2) : s,t \in \mathbb{R} \}$

   (b) $S = \{ (1,2,3) + s(1,-2,-2) + t(2,0,-1) : s,t \in \mathbb{R} \}$

16. Dados A y b en cada caso:

    (a) Hallar $rg\,(A)$

    (b) Determinar A^{-1}

    (c) Usar lo anterior para resolver el sistema $Ax = b$

    (d) Usar (c) para expresar b como cl de las columnas de A

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (ii) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

17. **Aplicación.** Las ecuaciones químicas dscriben las cantidades de sustancias consumidas y producidas por las reacciones químicas. Por ejemplo, cuando se quema gas propano (C_3H_8), éste se combina con oxígeno (O_2) para formar dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O), de acuerdo con una ecuación de la forma

$$(x_1)\,C_3H_8 + (x_2)\,O_2 \rightarrow (x_3)\,CO_2 + (x_4)\,H_2O$$

Para "balancear" esta ecuación, un químico debe encontrar números enteros $x_1, \ldots, x_4$ tales que el número total de átomos de carbono (C), hidrógeno (H) y oxígeno (O) situados a la izquierda sea igual al número correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción). Un método sistemático para balancear ecuaciones químicas consiste en establecer una ecuación que describa el número de átomos de cada tipo presente en una reacción. la ecuación anterior involucra tres tipos de átomos (carbono, hidrógeno y oxígeno) , construya un vector en $\mathbb{R}^3$ para cada reactivo y producto en la ecuación anterior que enliste el número de átomos por mólecula, como sigue:

$$C_3H_{8:} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad CO_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad H_2O : \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Carbón} \\ \longleftarrow \text{Hidrógeno} \\ \longleftarrow \text{Oxígeno} \end{array}$$

18. **Aplicación.** En la red de la figura siguiente

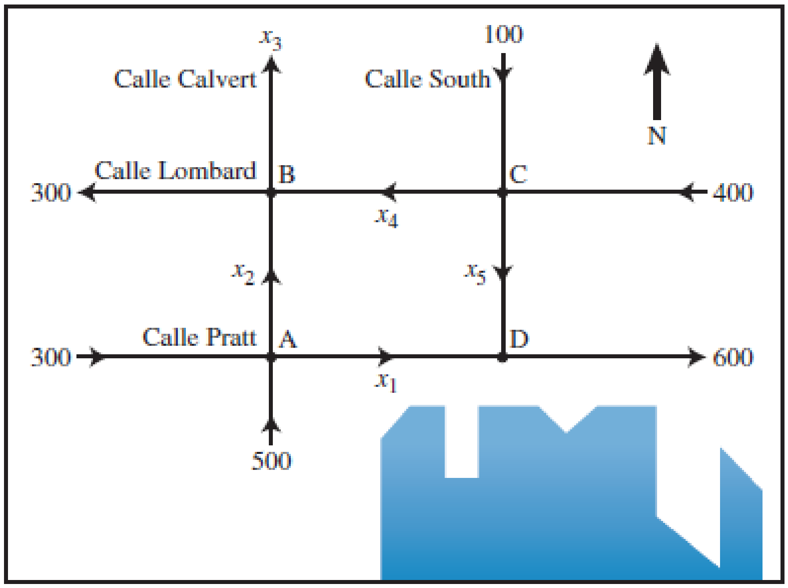

FIGURA 2 Calles de Baltimore.

se muestra el flujo del tráfico (en vehículos por hora) sobre varias calles de un solo sentido en el centro de Baltimore durante un día típico por la tarde. Determine el patrón de flujo general para la red.

3.3 Factorización LU

1. Dada la factorización $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, utilizarla para resolver el sistema $Ax = b$, para

$$(a) \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (b) \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (c) \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. Hallar la factorización LU para las siguientes matrices:

$$(a) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b) \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \qquad (c) \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Usando la factorización LU hallada en el ejercicio anterior, resolver el sistema $Ax = b$, para los correspondientes b

$$(a) \quad b_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (b) \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (c) \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$