2 Práctico 2: Determinantes. Inversas.

2.1 Determinantes

1. Si
$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4$$
Calcular, usando propiedades, los determinantes de las siguientes matrices
$$B = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+4c_1 & b_2+4c_2 & b_3+4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

2. Si $|A| = -4$ determine
$$(a) \quad \left|A^2\right| \qquad (b) \quad \left|A^{-1}\right| \qquad (c) \quad \left|A^3\right|$$

3. Si A y B son matrices de $n \times n$ con $|A| = 2$ y $|B| = -3$. Calcular $\left|A^{-1}B^t\right|$

4. Demuestre que si $\det(AB) = 0$ entonces $\det A = 0$ ó $\det B = 0$

5. ¿Es cierto que $\det(AB) = \det(BA)$?

6. Demuestre que si c es un número real y A es una matriz $n \times n$, entonces $\det(cA) = c^n \det A$

7. Determinante de Vandermonde. Demuestre que
$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$$

8. Demuestre que si A es un matriz antisimétrica $n \times n$, con n impar, entonces $\det A = 0$

9. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:
$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$(d) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$(g) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (i) \begin{bmatrix} \alpha & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

10. Evalué

$$a)\ \det \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2 & 2 \\ 3 & \alpha-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \det(\lambda I_3 - A) \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

11. Evalúe

$$a)\ \det \begin{bmatrix} \alpha-1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha-2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{bmatrix} \qquad b)\ \det(\lambda I_3 - A) \text{ donde } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Para cada una de las matrices del ejercicio anterior, determine todos los valores de α o λ respectivamente, para los que el determinante sea igual a cero.

13. Para cada una de las siguientes matrices, calcule el determinante dado por reducción a la forma triángular

$$(a)\ \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

14. Para cada una de las matrices del ejercicio 9 calcular su *polinomio carác-terístico* $(\det(A - xI))$

15. Demostrar:

    a) Si $A = A^{-1}$, entonces $\det A = \pm 1$

    b) Si $A^t = A^{-1}$, entonces $\det A = \pm 1$

    c) Si $A^n = O$, para algún entero positivo n, entonces $\det(A) = 0$

16. Sea Q una matriz de $n \times n$, en la que cada entrada es 1, demuestre que $\det(Q - nI_n) = 0$

17. Demuestre que si A y B son matrices cuadradas, entonces

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(B)$$

18. **Aplicación:** Dada la sucesión doble definida a partir de a_0 y b_0 de la siguiente manera :

$$i)\ \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases}$$

expresar a_n y b_n en funcion de a_0, b_0 y n (sugerencia: usar Hamilton Cayley).

19. **Aplicación: Determinantes como área o volumen.** Si A es una matriz de 2×2, el área del paralelogramo determinado por las columnas de A es $\det(A)$. Si A es una matriz de 3×3, el volumen del paralelepípedo determinado mediante las columnas de A es $\det(A)$.

20. Calcular el área del paralelogramo formado por los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$

$$a) \quad (1,5) \text{ y } (2,3) \qquad b) \quad (4,3) \text{ y } (5,4)$$

21. Calcular el área del paralelogramo determinado por los puntos $(-2,-2)$, $(0,3)$, $(4,-1)$ y $(6,4)$.

22. Calcular el volumen del paralelepípedo formado por los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$

$$a) \quad (1,2,1), \ (2,3,1) \text{ y } (-1,0,3)$$
$$b) \quad (1,1,1), \ (2,3,4) \text{ y } (1,1,5)$$

2.2 Matrices Inversas.

1. Usando *eliminación Gaussiana*, determinar si son inversibles las siguientes matrices y hallar A^{-1}, cuando sea posible:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (e) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (f) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calcular las inversas por cofactores de las matrices del ejercicio anterior en los casos que sea posible.

3. Demuestre que si A es una matriz no singular (inversible) tal que $A^2 = A$ entonces $\det A = 1$

4. Si A es una matriz $n \times n$, entonces A es *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún entero positivo k.

   a) Demuestre que toda matriz nilpotente es singular

   b) Verifique que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   es nilpotente.

c) Si A es nilpotente, demuestre que $I_n - A$ es no singular (Sugerencia: Determine $(I_n - A)^{-1}$ en los casos $A^k = O$, $k = 1, 2, \cdots$ y busque un patrón).

5. Demuestre que si A es una matriz singular de $n \times n$, entonces AB es singular para cualquier matriz B de $n \times n$.

6. Si A es una matriz de $n \times n$ y $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj\,(A) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{12}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{1n}}{\det(A)} \\ \frac{A_{21}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{2n}}{\det(A)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{\det(A)} & \frac{A_{n2}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

Corolario 3.3, Kolman B. & Hill D. Álgebra Lineal. pág.202.

Usando el corolario precedente, determinar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

7. ¿Qué valores de α hacen que no sea inversible la matriz:

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{bmatrix}$$

8. **Aplicación***:* Una viga elástica horizontal tiene soportes en cada extremo y está sometida a fuerzas en los puntos 1, 2, 3 como indica en la figura. Sea f en $\mathbb{R}^3$ tal que enliste las fuerzas en esos puntos, y sea y en $\mathbb{R}^3$ tal que incluya las magnitudes de la deflexión (esto es, movimiento) de la viga en los tres puntos. Al aplicar la ley de Hooke de la física, se puede demostrar que

$$y = Df$$

donde D es una *matriz de flexibilidad*. Su inversa se denomina *matriz de rigidez*. Describa el significado físico de D y D^{-1}.

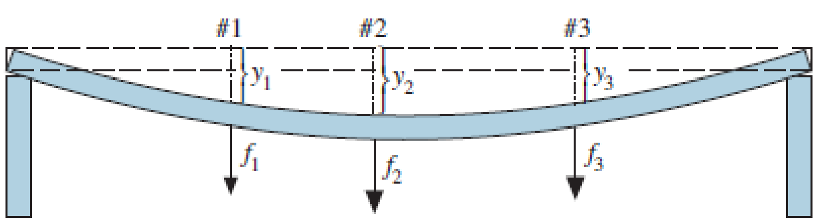


FIGURA 1 Deflexión de una viga elástica.

9. Sea

$$D = \begin{bmatrix} .005 & .002 & .001 \\ .002 & .004 & .002 \\ .001 & .002 & .005 \end{bmatrix}$$

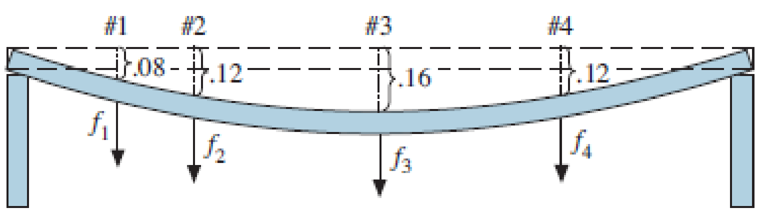
una matriz de flexibilidad, con la flexibilidad medida en pulgadas por libra. Suponga que se aplican fuerzas de 30, 50 y 20 libras sobre los puntos 1, 2 y 3, respectivamente en la figura de la aplicación anterior. Encuentre las deflexiones correspondientes.

10. Encuentre la matriz de rigidez D^{-1} para la D del ejercicio anterior. Enliste las fuerzas que se necesitan para producir una flexión de 0.04 pulgadas en el punto 3, con deflexión 0 en los otros puntos.

11. Sea

$$D = \begin{bmatrix} .0040 & .0030 & .0010 & .0005 \\ .0030 & .0050 & .0030 & .0010 \\ .0010 & .0030 & .0050 & .0030 \\ .0005 & .0010 & .0030 & .0040 \end{bmatrix}$$

una matriz de flexibilidad para una viga elástica con cuatro puntos en los cuales se aplican fuerzas. Las unidades son centímetros por newton de fuerza. Las mediciones en los cuatro puntos muestran deflexiones de 0.08, 0.12, 0.16 y 0.12 cm. Determine las fuerzas presentes en los cuatro puntos.



12. Considere a la D dada en el ejercicio anterior y determine las fuerzas que producen una deflexión de .24 cm en el segundo punto de la viga, con deflexión cero en los otros tres puntos de la viga. ¿Que relación hay entre la respuesta al problema y las entradas de D^{-1}? (Sugerencia: Primero conteste la pregunta para una deflexión de 1 cm en el segundo punto.)