Álgebra Lineal
Segundo Cuatrimestre 2017

1 Práctico 1: Vectores. Matrices.

1.1 Vectores

1. Grafique los siguientes vectores en R^3

   a) $u_1 = (0,0,1)$ *b*) $u_2 = (0,1,0)$ *c*) $u_3 = (1,0,0)$
   d) $u_4 = (1,2,0)$ *e*) $u_5 = (0,1,2)$ *f*) $u_6 = (1,0,2)$
   g) $u_7 = (1,1,1)$ *h*) $u_8 = (2,1,2)$

2. Operaciones con matrices. Calcule $u+v$, $u-v$, $2u$, $3u-2v$. Grafique aproximadamente.

   (a) $u = (2,3,1)$ $v = (-2,0,1)$
   (b) $u = (0,1,0)$ $v = (0,0,1)$
   (c) $u = (-1,2,-1)$ $v = (0,1,1)$
   (d) $u = (-4,-3,-2)$ $v = (4,3,2)$

3. Determine la longitud de los siguientes vectores

   (a) $(1,2,1)$ (b) $(-3,4,1)$ (c) $(0,2,0)$ (d) $(-4,-3,2)$

4. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos

   (a) $(2,3,4)$ y $(3,4,2)$ (c) $(2,4,0)$ y $(-1,1,0)$
   (b) $(-2,3,1)$ y $(0,1,0)$ (d) $(-2,-5,2)$ y $(-3,-2,1)$

5. Probar que las operaciones entre vectores satisfacen las siguientes propiedades, realizarlo para $n = 3$, aunque valen para todo n.

   (a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale que $x + y = y + x$
   (b) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ vale que $(x + y) + z = x + (y + z)$
   (c) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $0 + x = x$
   (d) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe el vector $-x$ de modo que $x + (-x) = 0$
   (e) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que $a\,(bx) = (ab)\,x$
   (f) Para cada $a \in \mathbb{R}$ y todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale que $a\,(x + y) = ax + ay$
   (g) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que $(a + b)\,x = ax + bx$

(*h*) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $1x = x$, $0x = 0$

6. Utilizando ambas operaciones (suma y producto por escalares) se construyen *combinaciones lineales* (*cl*) de vectores. Si los vectores v y w son ambos (*cl*) de $u_1, \ldots, u_k$ probar que tanto $v + w$ como αv, (con $\alpha \in \Bbbk$ arbitrario), son también *cl* de $u_1, \ldots, u_k$

7. Escribir el vector $v = (13, 4, 5)$ como combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$

8. Dados los vectores $u = (1, 2, 0)$ y $v = (-1, 2, -1)$ escribir al menos tres combinaciones lineales de ellos (suma, resta y multiplicación por escalar) y graficarlos.

9. Demuestre que si w es ortogonal a u y a v, entonces w es ortogonal a $au + bv$, donde a y b son escalares.

10. Verifique que el triángulo con vértices $p_1 = (2, 3, -4)$, $p_2 = (3, 1, 2)$ y $p_3 = (7, 0, 1)$ es un triángulo rectángulo.

11. Verifique que el triángulo con vértices $p_1 = (2, 3, -4)$, $p_2 = (3, 1, 2)$ y $p_3 = (-3, 0, 4)$ es un triángulo isósceles.

12. Sean x, $y \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 3$, $\|y\| = 2$ y $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$ el ángulo entre ambos. Mostrar que los vectores $x + 2y$ y $x - y$ son ortogonales.

13. *Teorema de Pitágoras* en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ sii } x, y = 0$$

14. Demuestre la Ley del Pararlelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

15. Demuestre que

$$x.y = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2$$

16. Probar la *Desigualdad Triángular*, para vectores cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

1.2 Matrices

1. Considerando las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

De ser posible resolver

(a)	$A+B$	(b)	$D-F$	(c)	$2C-3E$
(d)	$(3D-2F)^t$	(e)	$2A^t+B$	(f)	$2A+B$
(g)	AB	(h)	$BC+AE$	(i)	$\lambda I_3 - E$

2. Calcular las potencias en los siguientes casos:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^3$ $\qquad$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$

(c) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}^n$ $\qquad$ (d) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}^n$

3. Dados los vectores de $\mathbb{R}^n$ pueden verse como matrices $n \times 1$, las propiedades de las *matrices traspuestas* también se aplican a vectores. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad x = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcule $(Ax)^t$, $x^t A^t$, xx^t, y $x^t x$. ¿Está definida $A^t x^t$?

4. Sean $u = (-2, 3, -4)^t$ y $v = (a, b, c)^t$. Calculen $u^t v$, $v^t u$, uv^t, y vu^t.

5. Para A en $M_n(K)$ probar:

   (a) $A^t A$ y $A A^t$ son matrices simétricas.

   (b) $A + A^t$ es simétrica.

   (c) $A - A^t$ es antisimétrica.

6. Si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, demuestre que $A + B$ también es simétrica.

7. Si A y B son matrices simétricas en $K^{n\times n}$. Demostrar que: AB es simétrica, si y sólo si, A y B permutan.

8. Si A es inversible y simétrica probar que A^{-1} es simétrica.

9. Demostrar que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una antisimétrica. Descomponer las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sea $p(x) = 3x^2 - 5x + 2$, evaluar $p(x)$ en las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Una matriz $P \in K^{n\times n}$ se dice *idempotente* si $P^2 = P$. Sean A y B matrices idempotentes:

    a) Demostrar que si A y B son además matrices conmutativas entonces AB es idempotente.

    b) Demuestre que si A es idempotente, A^t es idempotente.

    c) ¿$A + B$ es idempotente? Argumente su respuesta.

    d) Determine todos los valores de k para los que kA también es idempotente.

12. Una matriz cuadrada J se dice *involutiva* si $J^2 = I$. Probar que si P es idempotente, entonces $2P - I$ es involutiva, y si J es involutiva, entonces $\frac{J+I}{2}$ es idempotente.

13. Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$, entonces se define la traza de A, $tr\,(A)$ como la suma de todos los elementos de la diagonal principal de A

$$tr\,(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

    Demuestre:

    a) $tr\,(\alpha A) = \alpha tr\,(A)$, $\alpha \in \mathbb{k}$

    b) $tr(A + B) = tr\,(A) + tr\,(B)$

    c) $tr(AB) = tr\,(BA)$

    d) $tr\,(A^t) = tr\,(A)$

    e) $tr\,(A^t A) \geq 0$

14. Demuestre que si $tr\,(A^t A) = 0$, entonces $A = 0$.