Índice general

1 TRANSFORMACIONES LINEALES

En este capítulo vamos a estudiar un tipo particular de funciones entre dos espacios vectoriales. Estas funciones tienen la particularidad que preservan, en el sentido que se definirá más adelante, la estructura vectorial.

1.1. Definiciones preliminares

Definición 1.1

Sean V y W dos espacios vectoriales. Una transformación lineal entre V y W es una función

$$T : V \to W$$

satisfaciendo las siguientes condiciones:

T1. $T(cv) = cT(v)$, para todo vector $v \in V$ y para todo escalar $c \in \mathbb{R}$.

T2. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para todo par de vectores $u, v \in V$.

Ahora enunciaremos algunas propiedades de las transformaciones lineales.

Lema 1.1 Consideremos una transformación lineal $T : V \to W$. Entonces se verifican las siguientes propiedades

1. $T(0) = 0$.
2. $T(-v) = -T(v)$.
3. $T(u-v) = T(u) - T(v)$.
4. $T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + \cdots + c_nT(v_n)$.

Demostración. Ejercicio. □

Las condiciones de la Definición 1.1 se pueden expresar en una sola condición, como se enuncia en el siguiente lema.

Lema 1.2 Sean V y W dos espacios vectoriales. Una función $T : V \to W$ es una transformación lineal si y sólo si

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u),$$

para cualquier par de escalares α y β, y para cualquier par de vectores v y u en V.

Cuando estamos trabajando sobre el mismo espacio, es decir cuando $V = W$, la transformación lineal $T : V \to V$ se dice que es un *operador lineal o un endomorfismo*.

Ahora daremos algunos ejemplos de transformaciones lineales.

Ejemplo 1.1

Consideremos la función

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definida por

$$T(x,y) = (2x+y, x+3y).$$

Comprobar que T es una transformación lineal. Hallar $T(2,-1)$ y la preimagen de $(4,-3)$.

Solución

Podemos comprobar que T satisface las condiciones de la Definición 1.1, o, como en este ejemplo, podemos comprobar que se verifica la condición establecida en el Lema anterior. Consideremos los vectores $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
T(\alpha v_1 + \beta v_2) &= T(\alpha(x_1,y_1) + \beta(x_2,y_2)) \\
&= T((\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_2, \beta y_2)) \\
&= T((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)) \\
&= (2(\alpha x_1 + \beta x_2) + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + 3(\alpha y_1 + \beta y_2)) \\
&= (2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + 3\alpha y_1 + 3\beta y_2) \\
&= (\alpha(2x_1 + y_1) + \beta(2x_2 + y_2), \alpha(x_1 + 3y_1) + \beta(x_2 + 3y_2)) \\
&= (\alpha(2x_1 + y_1), \alpha(x_1 + 3y_1)) + (\beta(2x_2 + y_2), \beta(x_2 + 3y_2)) \\
&= \alpha(2x_1 + y_1, x_1 + 3y_1) + \beta(2x_2 + y_2, x_2 + 3y_2) \\
&= \alpha T(x_1, y_1) + \beta T(x_2, y_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto T es una transformación lineal.
Determinemos la imagen del vector $v = (2,-1)$.

$$T(2,-1) = (2-1, 2+3(-1)) = (1,-1).$$

Ahora nos piden encontrar la preimagen del vector $w = (4,-3)$. Entonces debemos hallar el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$T^{-1}(4,-3) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(v) = (4,-3)\right\}.$$

Entonces

$$(x,y) \in T^{-1}(4,-3) \Leftrightarrow T(x,y) = (4,-3)$$

y en consecuencia

$$T(x,y) = (2x+y, x+3y) = (4,-3).$$

Igualando componentes obtenemos un sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y & = & 4 \\ x+3y & = & -3 \end{array}\right.$$

Resolviendo obtenemos $x = 3$ e $y = -2$. Por lo tanto

$$T(3,-2) = (4,-3).$$

Las transformaciones lineales se pueden representar también por medio de vectores columnas. Por ejemplo la transformación anterior se podría escribir como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+3y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.2

Se puede comprobar que función $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 4x+y \\ -x+5y \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal. Esta transformación se puede escribir como

$$T(x,y) = (3x-2y, 4x+y, -x+5y).$$

El hecho de escribir a los vectores como matrices tiene sus ventajas, que veremos más adelante.

Las transformaciones pueden ser definidas de muchas formas. Una de las formas más importantes son las transformaciones lineales entre espacios de dimensión finita definidas por matrices.

Ejemplo 1.3

Definimos una función $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Comprobar que es una transformación lineal. Hallar la imagen de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución

En este caso tenemos una función definida por el producto de una matriz 3×2 por una matriz 2×1. Es sencillo comprobar que T es una transformación lineal utilizando las propiedades de producto de un escalar por una matriz y suma de matrices. En efecto. Si $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T\left(c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= cT\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Queda como ejercicio comprobar que

$$T(v+w) = T(v) + T(w).$$

Observemos que si realizamos el producto de matrices indicado obtenemos la siguiente expresión de la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 4x+y \\ -x+5y \end{pmatrix}.$$

Notemos que si nos hubiesen dado la transformación lineal por la fórmula anterior podríamos obtener sencillamente la matriz A de la transformación como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 4x+y \\ -x+5y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Notemos además que si $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son los vectores de la base canónica, entonces

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

y por lo tanto

$$A = (T(e_1)\, T(e_2)) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Por este motivo la matriz A se la conoce como *la matriz estandar de la transformación.*

En general cualquier matriz define una transformación lineal, como se enuncia en el siguiente lema y cuya demostración queda a cargo del lector.

Lema 1.3 Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces la función

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definida por

$$T_A(\vec{x}) = A\vec{x},$$

para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es una transformación lineal, llamada transformación matricial.

Demostración. Ejercicio. □

En el lema anterior hemos dado por entendido que el vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ que aparece a la derecha de la identidad que define a la transformación se expresa como un vector columna $n \times 1$.

Ejemplo 1.4

Analicemos geométricamente la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Notemos que la transformación se puede escribir como

$$T_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Analicemos en que se transforma el recinto delimitado por los vectores canónicos $e_1 = (1,0)$ y $e_2 =$

$(0,1)$. Al aplicar la transformación obtenemos

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el reciento delimitados por los vectores e_1 y e_2 ha rotado un ángulo de $\frac{\pi}{4}$

Ahora veremos que la proyección sobre un subespacio de $\mathbb{R}^n$ define una transformación lineal.

Ejemplo 1.5 Proyección de un vector sobre un plano

Consideremos un subespacio S fijo de $\mathbb{R}^n$. Definimos una función

$$T_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

por

$$T_S(v) = \text{proy}_S v,$$

para cada $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces se puede probar que T_S es una transformación lineal. Recordemos que como S es un subespacio de dimensión finita existe un conjunto ortogonal de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ tal que $S = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$. Entonces

$$T_S(v) = \text{proy}_S v = \text{proy}_{u_1} v + \cdots + \text{proy}_{u_k} v.$$

Ejemplo 1.6 Coordenadas

Consideremos un espacio V de dimensión n. Consideremos una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V. Sabemos que todo vector v de V es combinación de vectores de la base. Es decir, para cada $v \in V$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \underbrace{(v_1\, v_2 \ldots v_n)}_{M_B} \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}_{[v]_B} = M_B\,[v]_B\,.$$

Entonces podemos definir una función que a cada vector v del espacio V le corresponde su vector de coordenadas $[v]_B \in \mathbb{R}^n$, que sabemos que es único para cada base ordenada. Entonces definimos la función

$$T : V \to \mathbb{R}^n$$

dada por

$$T(v) = [v]_B\,.$$

Se puede probar que T es una transformación lineal entre V y el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Es más, se puede demostrar que T es una función inyectiva y sobreyectiva.

Finalizamos esta sección mostrando una función entre dos espacios vectoriales que *no* es una transformación lineal.

Ejemplo 1.7

Consideremos la función
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
definida por
$$f(x,y)=(x+a,y+b),$$
donde $a,b\in\mathbb{R}$. Es inmediato comprobar que f es una función pero no es una transformación lineal pues
$$f(0,0)=(a,b)$$
y el par (a,b) es en general distinto de $(0,0)$. Otra forma de probar es tomando, por ejemplo, los vectores $v=(1,-2)$ y $w=(3,0)$ y observando que
$$f((1,-2)+(3,0))=f(4,-2)=(4+a,-2+b)$$
y
$$f(1,-2)+f(3,0)=(1+a,-2+b)+(3+a,0+b)=(4+2a,-2+2b)$$
Por lo tanto
$$f((1,-2)+(3,0))\neq f(1,-2)+f(3,0).$$

Sea $f:A\to B$ una función entre dos conjuntos.
El dominio de f es el conjunto A y la imagen o rango de f es el conjunto
$$\mathrm{Img}f=\{y\in B:\exists x\in A \text{ tal que } f(x)=y\}.$$
Recordemos que la *imagen de un subconjunto* X de A por medio de f es el siguiente subconjunto de B
$$f(X)=\{f(x):x\in X\}.$$

La *imagen inversa* de un subconjunto Y de B es el subconjunto de X definido como
$$f^{-1}(Y)=\{x\in A:f(x)\in Y\}.$$

Ahora vemos algunas propiedades importantes de las transformaciones lineales.

Lema 1.4 Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $T:V\to W$ una transformación lineal.

1. Si S es un subespacio de V, entonces $T(S)$ es un subespacio de W.
2. Si H es un subespacio de W, entonces $T^{-1}(H)$ es un subespacio de V.
3. Si $S=\langle v_1,\ldots,v_n\rangle$ es un subespacio de V generado por $v_1,\ldots,v_n$, entonces $T(\langle v_1,\ldots,v_n\rangle)=\langle T(v_1),\ldots,T(v_n)\rangle$.
4. Si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un conjunto de generadores de V, entonces $\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$ es un conjunto de generadores de la imagen de T.
5. Si $\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración. Queda como ejercicio. □

Ejemplo 1.8

Consideremos la transformación lineal
$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
definida por
$$T(x,y,z) = (x-z, y-z).$$
Determinar la imagen de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$
$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(5,3,2)\right\}$$
y
$$S_2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R} : x,y \in \mathbb{R}\}.$$
Hallar la preimagen de
$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y = 0\right\}.$$

Solución

El conjunto S_1 es una recta en $\mathbb{R}^3$ que tiene como vector director al vector $v = (5,3,2)$. Entonces
$$\begin{aligned} T(S_1) &= \{T(x,y,z) : (x,y,z) \in S_1\} \\ &= \{T(\alpha(5,3,2)) = \alpha T(5,3,2) = \alpha(3,1)\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \alpha(3,1)\right\}. \end{aligned}$$
Luego la imagen de S_1 es una recta del plano que pasa por el origen y tiene como vector director a $(3,1)$.
El conjunto S_2 es el plano xy en $\mathbb{R}^3$. Entonces
$$\begin{aligned} T(S_2) &= \{T(x,y,z) : (x,y,z) \in S_2\} \\ &= \{T(x,y,0) = (x,y)\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Ahora determinemos la preimagen de $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y = 0\right\}$. Entonces
$$\begin{aligned} (x,y,z) \quad \in T^{-1}(H) \quad &\Leftrightarrow \quad T(x,y,z) \in H \\ &\Leftrightarrow \quad (x-z, y-z) \in H \\ &\Leftrightarrow \quad x-z+3(y-z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x+3y-4z = 0. \end{aligned}$$
Por lo tanto
$$T^{-1}(H) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y-4z = 0\right\}.$$

1.2. Matriz estandar de una transformación lineal

En el ejemplo 1.1 hemos visto una transformación que se puede definir por medio de una matriz. Representar o definir una transformación lineal entre espacios de dimensión finita por medio de matrices tiene muchas ventajas. En primer lugar una transformación lineal definida a partir de una matriz es más sencilla de leer, escribir y de manipular. Además podemos hacer uso de toda la teoría de matrices para resolver problemas referidos a transformaciones lineales. Ahora veremos que cualquier transformación lineal entre espacios de dimensión finita puede ser definida o representada por medio de una matriz.

Primero analizamos la matriz llamada *matriz estandar* o *matriz en la base canónica* de una transformación lineal entre espacios vectoriales euclídeos.

Teorema 1.1 Matriz estandar de una transformación lineal

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Consideremos los transformados de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, T(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz , llamada matriz estandar de T,

$$A = [T] = (T(e_1)\, T(e_2) \ldots T(e_n)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es tal que

$$T(\vec{x}) = A\vec{x},$$

para cualquier $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

La matriz A construida en el Teorema anterior se ha definido respecto a las bases canónica. Pero es posible trabajar con otras bases y en consecuencia la matriz asociada no será igual a la matriz obtenida a partir de la base canónica. Esto será estudiado más adelante.

Ejemplo 1.1

Determinar las matrices estandar de las siguientes transformaciones lineales:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$$T(x,y,z) = (x-3y+4z, 2x-5z).$$
2. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$
$$F(x,y,z) = (x+3y, y-3z, x-y+2z, 3x-4z).$$

Solución

1. Para determinar la matriz estandar podemos calcular la imagen de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Otra forma de obtener la matriz estandar es escribir la transformación como vectores columna y de ahí determinar la matriz

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y+4z \\ 2x-5z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Luego

$$[T] = A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

es la matriz estandar de T.

Calculamos la imagen de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$A=(T(e_1)\,T(e_2)\,T(e_3))=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Otra manera de hallar la matriz de transformación es escribir la transformación como

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x-3y+4z, 2x-5z). \\ &= x(1,2)+y(-3,0)+z(4,-5). \end{aligned}$$

La matriz A se obtiene escribiendo como vectores columna los vectores $(1,2)$, $(-3,0)$ y $(4,-5)$,es decir

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Procediendo como en el ejemplo anterior tenemos

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3y \\ y-3z \\ x-y+2z \\ 3x-4z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

es la matriz estandar de F.

Ejemplo 1.2 Reflexiones respecto de un eje

Definamos una función que envíe a cada punto (x,y) del plano $\mathbb{R}^2$ a su simétrico $(x,-y)$ respecto del eje x. Este tipo de funciones también se las conoce como *reflexiones* respecto a una recta. En este caso tenemos la reflexión respecto del eje x y la función $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ se define por medio de la fórmula

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Se podría comprobar que es una transformación lineal utilizando la definición, pero también podemos observar que es una transformación proviene de una matriz. es una transformación matricial. En forma más directa podemos observar que esta función está definida a partir de una matriz:

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{[T]}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Entonces por el Lema 1.1, T es una transformación lineal.
Podemos considerar también la reflexión respecto al eje y. En este caso cada punto (x,y) se *refleja* a través del eje y en el punto $(-x,y)$. En este caso la transformación queda definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Veamos otro importante ejemplo que se obtiene al rotar un punto del plano cierto ángulo θ.

Ejemplo 1.3 Transformación de Rotación

Consideremos un vector $v = (x, y)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ y que lo rotamos un ángulo θ en el sentido contrario a de las agujas del reloj. Al rotar el vector v a la nueva posición produce un nuevo vector de componentes $v' = (x', y')$. Entonces podemos definir una función

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Si α es el ángulo que forma el vector v con el eje x, entonces $\alpha + \theta$ es el ángulo que forma el vector v' con el eje x. Entonces si $r = \|v\|$ tenemos que

$$\begin{cases} x & = & r\cos\alpha \\ y & = & r\operatorname{sen}\alpha \\ & & \\ x' & = & r\cos(\alpha+\theta) \\ y' & = & r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \end{cases}$$

y teniendo en cuenta las fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned} r\cos(\alpha+\theta) &= r\cos\theta\cos\alpha - r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha \\ r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) &= r\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + r\cos\theta\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

obtenemos las coordenadas del vector v' en función del ángulo θ y el módulo r como

$$\begin{cases} x' & = & r\cos(\alpha+\theta) & = & \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\cos\theta - \underbrace{r\operatorname{sen}\alpha}_{y}\operatorname{sen}\theta & = & x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y' & = & r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) & = & \underbrace{r\operatorname{sen}\alpha}_{y}\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\operatorname{sen}\theta & = & y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Por lo tanto la *transformación de rotación* se define por la siguiente fórmula

$$T_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, determinar el vector que rota un ángulo $\dfrac{\pi}{2}$. Aplicando la fórmula anterior obtenemos

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Notemos que la matriz estandar de la transformación es

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se llama matriz de *rotación*.

1.3. Existencia de Transformaciones lineales entre espacios de dimensión finita

En el ejemplo **??** observamos que es posible conocer la imagen de todo vector de un espacio vectorial de dimensión finita por medio de una transformación lineal cuando conocemos las imagenes de una base. Supongamos ahora que tenemos dos espacios vectoriales de dimensión finita V y W y conocemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y un conjunto $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de vectores de W (no necesariamente una base). La pregunta que nos hacemos es la siguiente

¿Existirá una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$?

Si $v \in V$, como B es base, existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Luego

$$T(v) = T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n)$$

y al ser T es una transformación lineal, tenemos que

$$T(v) = c_1 T(v_1) + \cdots + c_n T(v_n).$$

En otras palabras, es suficiente definir una transformación lineal sobre alguna base del espacio vectorial para conocer el valor de la transformación lineal sobre cualquier vector. Esto lo precisamos en el siguiente resultado.

Teorema 1.2 Existencia y unicidad de las transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores de W. Entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para cada $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Damos la demostración ya que nos da una forma de construir la transformación que puede ser replicada en los ejercicios.

Consideremos un vector genérico $v \in V$. Debemos determinar una forma para calcular $T(\vec{x})$. Como $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Definimos una función $T : V \to W$ como

$$T(v) \stackrel{\text{def}}{=} c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n.$$

Ahora debemos comprobar que es una transformación lineal. Lo dejamos como ejercicio para el lector.

Finalmente debemos comprobar que es única. Supongamos que tenemos otra transformación lineal $L : V \to W$ tal que $L(v_i) = w_i$, para cada $1 \leq i \leq n$. Veamos que $T(v) = L(v)$ para cualquier vector $v \in V$. En efecto, como B una base de V, existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$. Entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = \\ &= c_1 T(v_1) + \cdots + c_n T(v_n) \\ &= c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n \\ &= c_1 L(v_1) + \cdots + c_n L(v_n) \\ &= L(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto $T = L$. Con esto hemos concluído que la transformación lineal es única. □

Veamos un ejemplo de como determinar una transformación lineal conociendo las imagenes de los vectores de una base.

Ejemplo 1.1

Estudiar si es posible definir una transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} T(0,1) &= (2,3) \\ T(2,1) &= (-1,1). \end{aligned}$$

Solución

Como $B=\{(0,1),(2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces por el Teorema 1.3 existe una única transformación T cumpliendo las condiciones indicadas. Veamos como determinar su expresión analítica.

Lo primero que debemos hacer es hallar las coordenadas $[v]_B=(\alpha,\beta)^t$ de un vector genérico $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ en la base B. Es decir, dado v debemos encontrar α y $\beta\in\mathbb{R}$ tales que

$$(x,y)=\alpha(0,1)+\beta(2,1).$$

Luego

$$\begin{aligned} x &= 2\beta \\ y &= \alpha+\beta. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que $\alpha=y-\frac{x}{2}$ y $\beta=\frac{x}{2}$. Entonces

$$(x,y)=\underbrace{\left(y-\frac{x}{2}\right)}_{\alpha}(0,1)+\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{\beta}(2,1).$$

Ahora aplicamos la transformación lineal a la expresión anterior

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(\alpha(0,1)+\beta(2,1)) \\ &= \alpha T(0,1)+\beta T(2,1) \\ &= \left(y-\frac{x}{2}\right)(2,3)+\left(\frac{x}{2}\right)(-1,1) \\ &= \left(2y-x-\frac{x}{2},3y-\frac{3}{2}x+x\right) \\ &= \left(2y-\frac{3}{2}x,3y-\frac{1}{2}x\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión analítica de T es

$$T(x,y)=\left(2y-\frac{3}{2}x,3y-\frac{1}{2}x\right).$$

Si queremos podemos obtener la matriz estandar de T. Como

$$\left(2y-\frac{3}{2}x,3y-\frac{1}{2}x\right)=x\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)+y(2,3),$$

entonces

$$[T]=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2

Consideremos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Sea

$$B = \{(1,1,1),(0,-1,1),(0,0,-1)\}$$

un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$. Determinar si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{array}{ll} T(1,1,1) & = (2,1,2) \\ T(0,-1,1) & = (1,-2,1) \\ T(0,0,-1) & = (-1,0,2) \end{array}$$

Encontrar su expresión analítica.

Solución

Para ver si es posible determinar una transformación lineal que satisfaga las condiciones pedidas debemos comprobar si se cumplen las condiciones del Teorema 1.3. Para poder aplicar este teorema debemos asegurar es que el conjunto de vectores $B = \{(1,1,1),(0,-1,1),(0,0,-1)\}$ sea linealmente independiente, algo que es sencillo de comprobar. Por lo tanto estamos en condiciones de asegurar que existirá la transformación lineal con las condiciones exigidas. El procedimiento general es más o menos el mismo en este tipo de ejercicios.
Primero vamos a determinar como son las coordenadas de un vector genérico $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en la base B. Es decir, debemos buscar escalares $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}$, las coordenadas de (x,y,z) en la base B, tal que

$$(x,y,z) = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3.$$

Cuando tengamos determinados estos escalares, aplicaremos la transformación lineal T a la expresión anterior y obtendremos

$$T(x,y,z) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + c_3T(v_3).$$

Como ya conocemos $T(v_1)$, $T(v_2)$ y $T(v_3)$ solo necesitamos encontrar los valores c_1, c_2 y c_3 para tener la expresión analítica de T.
En este caso

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3. \\ &= c_1(1,1,1) + c_2(0,-1,1) + c_3(0,0,-1) \\ &= (c_1, c_1 - c_2, c_1 + c_2 - c_3). \end{aligned}$$

Es decir

$$\left\{ \begin{array}{rl} c_1 & = x \\ c_1 - c_2 & = y \\ c_1 + c_2 - c_3 & = z \end{array} \right.$$

Luego debemos escalonar la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & -1 & z \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & 2x-y-z \end{array} \right)$$

Por lo tanto las coordenadas de cualquier vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en la base B son

$$[(x,y,z)]_B = \begin{pmatrix} x \\ x-y \\ 2x-y-z \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= c_1(1,1,1)+c_2(0,-1,1)+c_3(0,0,-1)\\ &= x(1,1,1)+(x-y)(0,-1,1)+(2x-y-z)(0,0,-1)\end{aligned}$$

Aplicando T obtenemos

$$\begin{aligned}T(x,y,z) &= xT(1,1,1)+(x-y)T(0,-1,1)+(2x-y-z)T(0,0,-1)\\ &= x(2,1,2)+(x-y)(1,-2,1)+(2x-y-z)(-1,0,2)\\ &= (2x+x-y-2x+y+z, x-2x+2y, 2x+x-y+4x-2y-2z)\\ &= (x+z,-x+2y,7x-3y-2z).\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión analítica de la transformación esta dada por

$$T(x,y,z) = (x+z,-x+2y,7x-3y-2z).$$

Si queremos comprobar que la expresión encontrada es correcta sustituímos los elementos de la base B y chequeamos que se transforman en los vectores del enunciado:

$$\begin{aligned}T(1,1,1) &= (2,1,2)\\ T(0,-1,1) &= (1,-2,1)\\ T(0,0,-1) &= (-1,0,2)\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3

Queremos definir una transformación lineal que tranforme el triángulo de vértices $(0,0),(0,1)$ y $(1,1)$ en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, y $(0,1)$

Como antes, para definir adecuadamente una transformación lineal que cumpla con los requisitos pedidos debemos tomar vectores que formen una base en $\mathbb{R}^2$ y transformarlos adecuadamente en vectores en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, podemos tomar

$$\begin{array}{ccc} v_1=(1,0) & \longrightarrow & u_1=(1,1)\\ v_2=(1,1) & & u_2=(0,1)\end{array}$$

Claramente el conjunto $B=\{v_1,v_2\}$ forma una base de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, según el Teorema 1.3, existe una única transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(v_1)=u_1$ y $T(v_2)=u_2$. Determinemos tal tranformación.

$$(x,y) = \alpha(1,0)+\beta(1,1).$$

Entonces

$$\alpha = x-y \text{ y } \beta = y.$$

Luego

$$\begin{aligned}T(x,y) &= T(\alpha(1,0)+\beta(1,1))\\ &= \alpha T(1,0)+\beta T(1,1)\\ &= (x-y)(1,1)+y(0,1)\\ &= (x-y,x).\end{aligned}$$

Luego la transformación buscada es

$$T(x,y) = (x-y,x).$$

1.4. Núcleo e imagen de una transformación lineal

Definición 1.1

Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
El *núcleo*, o kernel, de T es el siguiente subconjunto de V:

$$\text{Nuc}T = \left\{\vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

La *imagen* de T es el siguiente subconjunto de W:

$$\text{Img}T = \{\vec{y} \in W : \exists \vec{x} \in V \text{ tal que} T(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Teorema 1.3

Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

1. El núcleo de T es un subespacio de V.
2. La imagen de T es un subespacio de W.

Ejemplo 1.1

Consideremos la transformación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definida por $f(x,y) = (x-y, x+2y)$. Estudiar si $(1,-1) \in \text{Nuc}f$, y $(1,4) \in \text{Img}T$. Determinar $\text{Nuc}f$.

Solución

Notemos que $(1,-1) \in \text{Nuc}f$ si y sólo si $f(1,-1) = (0,0)$. Pero $f(1,-1) = (2,-1) \neq (0,0)$. Por lo tanto $(1,-1) \notin \text{Nuc}f$. Notemos que

$$(x,y) \in \text{Nuc}f \text{ sii } f(x,y) = (0,0) \text{ sii } (x-y, x+2y) = (0,0)$$

sii

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ x+2y &= 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, para determinar los vectores que están en el núcleo debemos resolver este sistema homogéneo. De la primera ecuación tenemos que $x = y$. Reemplazando en la segunda obtenemos $x + 2x = 0$, es decir $x = y = 0$. Luego el sistema anterior tiene como única solución el vector $(0,0)$. Entonces

$$\text{Nuc}f = \{(0,0)\}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (1,4) \in \text{Img}T &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (1,4) \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y, x+2y) = (1,4) \\ &\Leftrightarrow \text{el sistema } (**) \begin{cases} x-y &= 1 \\ x+2y &= 4 \end{cases} \text{tiene solución.} \end{aligned}$$

Entonces analizamos si el sistema $(**)$ tiene solución. De la primera ecuación obtenemos $y = x-1$. Entonces reemplazando en la segunda ecuación obtenemos $x + 2(x-1) = x + 2x - 2 = 4$. Luego $3x = 6$, es decir $x = 2$ y por lo tanto $y = 1$. Luego el sistema $(**)$ tiene como solución $x = 2$ e $y = 1$. Por lo tanto $f(2,1) = (1,4)$ y en consecuencia podemos afrimar que $(1,4) \in \text{Img}T$.

N Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y consideremos la transformación lineal

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definida por

$$T_A(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}T_A &= \left\{\vec{x} \in V : T_A(\vec{x}) = \vec{0}\right\} \\ &= \left\{\vec{x} \in V : A\vec{x} = \vec{0}\right\} \\ &= \mathrm{N}(A). \end{aligned}$$

Es decir, el núcleo de T_A es el *espacio nulo* de la matriz asociada a la transformación T_A:

$$\boxed{\mathrm{Nuc}T_A = \mathrm{N}(A).}$$

Como consecuencia de este hecho tenemos que

$$\dim\mathrm{Nuc}T_A = \dim\mathrm{N}(A).$$

De igual forma

$$\begin{aligned} \mathrm{Img}T &= \{\vec{y} \in W : \exists \vec{x} \in V \text{ tal que} T_A(\vec{x}) = \vec{y}\} \\ &= \{\vec{y} \in W : \exists \vec{x} \in V \text{ tal que} A\vec{x} = \vec{y}\} \\ &= \mathrm{Co}(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto la imagen de T_A es el *espacio columna* de la matriz asociada a la transformación T_A:

$$\boxed{\mathrm{Img}T = \mathrm{Co}(A).}$$

Notemos que de esta igualdad obtenemos que

$$\dim\mathrm{Img}T = \dim\mathrm{Co}(A) = \mathrm{rg}(A).$$

Las anteriores consideraciones anteriores son válidas para la matriz estandar de cualquier transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es decir,

$$\mathrm{Nuc}T = \mathrm{N}([T]) \text{ e } \mathrm{Img}T = \mathrm{Co}([T]).$$

Ejemplo 1.2

Recordemos que en el Ejemplo 1.1 definimos la transformación proyección en la dirección de un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ como la función $T_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T_S(v) = \mathrm{proy}_S v$ para cada $v \in \mathbb{R}^n$. Se puede probar que

$$\mathrm{Img}T_S = S \text{ y } \mathrm{Nuc}T_S = S^{\perp}.$$

Ahora enunciaremos un importante resultado que relaciona las dimensiones del núcleo y de la imagen con la dimensión de espacio del dominio de una transformación lineal.

Teorema 1.4 Teorema de las dimensión

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales de dimensión finita V y W. Si la dimensión de V es finita, entonces

$$\dim V = \dim \operatorname{Nuc} T + \dim \operatorname{Img} T.$$

Ejemplo 1.1

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+2y-z, x+y-3z, 3x+4y-7z).$$

Determinar los subespacios $\operatorname{Nuc} T$, $\operatorname{Img} T$, sus dimensiones y una base para cada subespacio. Hallar un sistema de ecuaciones del subespacio $\operatorname{Img} T$.

Solución

Primero determinamos el núcleo de T. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Nuc} T \quad &\Leftrightarrow \quad T(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2y-z, x+y-3z, 3x+4y-7z) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} x+2y-z = 0 \\ x+y-3z = 0 \\ 3x+4y-7z = 0 \end{cases}$$

Consideramos la matriz asociada a este sistema (que es la misma que la matriz estandar de la transformación)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x+2y-z = 0 \\ -y-2z = 0 \end{cases}$$

Luego

$$\begin{cases} x = 5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Por lo tanto un vector genérico del núcleo debería tener la forma

$$(x,y,z) = (5z, -2z, z) = z(5,-2,1).$$

Luego el núcleo es el subespacio

$$\operatorname{Nuc} T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(5,-2,1)\right\} = \langle (5,-2,1) \rangle$$

Claramente la dimensión es 1. Notemos que el núcleo es lo mismo que el subespacio $\mathrm{N}(A)$.
La imagen la podemos obtener aplicando propiedades sobre la expresión que define la transformación lineal. Es decir,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x+2y-z, x+y-3z, 3x+4y-7z) \\ &= x(1,1,3)+y(2,1,4)+z(-1,-3,-7). \end{aligned}$$

Como vimos en la matriz escalonada de la matriz A, los vectores columna $(1,1,3)$ y $(2,1,4)$ son linealmente independientes y por lo tanto forman una base de la imagen. Entonces la imagen es el subespacio

$$\mathrm{Img}T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,1,3)+\beta(2,1,4)\right\} = \mathrm{Co}(A).$$

Luego

$$\mathrm{Img}T = \mathrm{Co}(A) = \langle (1,1,3), (2,1,4) \rangle.$$

Hallemos un sistema de ecuaciones que defina a la imagen. Para ello escalonamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 4 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & a-b \\ 0 & -2 & c-3a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 2a-2b+c-3a \end{array}\right)$$

Entonces $-a-2b+c=0$. Cambiamos a la notación más usual obtenemos que la imagen es el plano

$$\mathrm{Img}T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x-2y+z=0\right\}.$$

Podemos comprobar el Teorema de la dimensión

$$\dim\mathrm{Nuc}T + \dim\mathrm{Img}T = 1+2 = 3 = \dim\mathbb{R}^3.$$

El problema de encontrar una base para $\mathrm{Nuc}T$ siempre se reduce a encontrar una base para el espacio solución de un sistema homogéneo o lo que es igual es llo mismo que determinar el subespacio nulo de la matriz estandar asociada a la transformación. Para la $\mathrm{Img}T$, podemos obtener una base teniendo en cuenta que los vectores de la imagen deben ser combinación lineal de los vectores columna de la matriz estandar asociada. Otra forma se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2

Consideremos la transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

definida por

$$T(x,y,z,w) = (x+y, z+w, x+z).$$

Determinar una base de $\mathrm{Img}T$ y de $\mathrm{Nuc}T$.

Solución

Como

$$T(x,y,z,w) = x(1,0,1)+y(1,0,0)+z(0,1,1)+w(0,1,0),$$

entonces el conjunto de vectores

$$H = \{(1,0,1), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0)\}$$

genera al subespacio $\mathrm{Img}T$. Pero no es una base, pues el espacio tiene dimensión 3. Para hallar los vectores linealmente independientes escribimos los vectores de H como la siguiente combinación lineal

$$(0,0,0) = a(1,0,1)+b(1,0,0)+c(0,1,1)+d(0,1,0).$$

Esto produce un sistema, cuya matriz aumentada reducida queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Como los unos que están como pivotes aparecen en las columnas 1, 2 y 3, concluimos que los primeros tres vectores de H forman una base para Img$T$. Entonces

$$B = \{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1)\}$$

es una base para Img$T$.
En forma alternativa, podemos proceder formar la matriz cuyas filas son los vectores dados

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al transformar esta matriz a su forma escalonada reducida por filas, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1)$ es una base de la imagen de T.

Ejemplo 1.3

Encuentre una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que Nuc$T = S$ y Img$T = W$, donde

$$S = \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 2x+z & = & 0 \end{array} \right. \text{ y } W = \langle (2,-1,0),(0,1,-2) \rangle .$$

Solución
De acuerdo al Teorema 1.3, debemos determinar una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y un conjunto de vectores de$\mathbb{R}^3$ que nos permitan definir la transformación lineal con las condiciones dadas. Lo primero que debemos hacer es hallar una base del subespacio S. Este subespacio está definida por dos ecuaciones. De la segunda ecuación obtenemos $z = -2x$. Sustituyendo en la primera, $x+y+2x = 0$. Entonces $y = -3x$. Por lo tanto

$$(x,y,z) = (x,-3x,-2x) = x(1,-3,-2).$$

Luego

$$S = \langle (1,-3,-2) \rangle .$$

El vector $(1,-3,-2)$ debe pertenecer a la base B. Entonces $v_1 = (1,-3,-2) \in B$. Luego ya sabemos que debemos definir T tal que

$$T(1,-3,-2) = (0,0,0),$$

pues necesitamos que Nuc$T = S$. Debemos elegir otros dos vectores v_2 y v_3 para completar la base de tal forma que $T(v_2), T(v_3) \in W$. Es sencillo comprobar que si seleccionamos $v_2 = (1,0,0)$ y $v_3 = (0,1,0)$, entonces $B = \{(1,-3,-2),(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Ahora debemos seleccionar vectores apropiados para definir la transformación

$$\begin{aligned} T(1,-3,-2) &= (0,0,0) \\ T(1,0,0) &= (2,-1,0) \\ T(0,1,0) &= (0,1,-2). \end{aligned}$$

Ahora podemos construir la expresión analítica de la transformación lineal. Sea (x,y,z) un vector de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= \alpha(1,-3,-2)+\beta(1,0,0)+\delta(0,1,0) \\ &= (\alpha+\beta,-3\alpha+\delta,-2\alpha) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{cases} x &= \alpha+\beta \\ y &= -3\alpha+\delta \\ z &= -2\alpha \end{cases}$$

Como $y = -3\alpha+\delta$ y $\alpha = -\frac{z}{2}$, entonces $\delta = y+3\alpha = y-\frac{3}{2}z$. Finalmente, de $x = \alpha+\beta$, obtenemos $\beta = x-\alpha = x+\frac{z}{2}$. Por lo tanto

$$(x,y,z) = \left(-\frac{z}{2}\right)(1,-3,-2)+\left(x+\frac{z}{2}\right)(1,0,0)+\left(y-\frac{3}{2}z\right)(0,1,0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \left(-\frac{z}{2}\right)T(1,-3,-2)+\left(x+\frac{z}{2}\right)T(1,0,0)+\left(y-\frac{3}{2}z\right)T(0,1,0) \\ &= \left(-\frac{z}{2}\right)(0,0,0)+\left(x+\frac{z}{2}\right)(2,-1,0)+\left(y-\frac{3}{2}z\right)(0,1,-2) \\ &= (2x+z,-x-2z+y,-2y+3z). \end{aligned}$$

Por lo tanto la transformación lineal queda definida por

$$T(x,y,z) = (2x+z,-x-2z+y,-2y+3z).$$

1.5. Clasificación de las transformaciones lineales

Recordemos que una función

$$f : A \to B$$

es *inyectiva* o *uno-uno*, si cumple la siguiente condición:

- Para todo $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$.

Diremos que f es sobreyectiva si para cada $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. En este caso la imagen de f coincide con todo el conjunto B, es decir, $\operatorname{Img} f = B$.

Como toda transformación lineal entre dos espacios vectoriales es una función, entonces podemos hablar de transformaciones lineales inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. En el contexto del álgebra lineal estas clases de transformaciones lineales reciben nombre particulares.

Definición 1.1

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

1. T es un *monomorfismo* si T es inyectiva: es decir si se cumple
$$T(x) = T(y) \text{ entonces } x = y,$$
para todo $x, y \in V$.
2. T es un *epimorfismo* si T es sobreyectiva, es decir si se cumple
$$\text{Para cada } y \in W \text{ existe } x \in V \text{ tal que } T(x) = y.$$
Esto es equivalente a decir que
$$\mathrm{Img}T = W.$$
3. T es un *isomorfismo* si T es biyectiva, es decir, si T es monomorfismo y epimorfismo.
4. T es un *endomorfismo* cuando $V = W$.
5. T es un *automorfismo* si es un endomorfismo biyectivo.

Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, entonces diremos que V y W son isomorfos. Escribiremos
$$V \cong W$$
cuando existe un isomorfismo entre V y W. Notemos que si existe un isomorfismo $T : V \to W$, entonces existe la función inversa $T^{-1} : W \to V$ que se puede probar que es un isomorfismo.

Teorema 1.5

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces
$$T \text{ es un monomorfismo sii } \mathrm{Nuc}T = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Ahora damos una caracterización de las transformaciones lineales sobreyectivos, es decir, de los epimorfismos.

Teorema 1.6

Una transformación lineal $T : V \to W$ es sobreyectiva si, y sólo si cualquier conjunto de vectores que genera a V se transforma mediante T en un conjunto de generadores de W.

Ejemplo 1.1

Determinar si transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(x, y) = (2x - y, x + y)$$
es un monomorfismo y un epimorfismo.

Solución

De acuerdo con el Teorema 1.5 debemos T será un monomorfismo cuando $\mathrm{Nuc}T = \{(0,0)\}$. Entonces
$$T(x, y) = (0, 0)$$

sii

$$(2x-y,x+y)=(0,0)$$

sii

$$\begin{aligned} 2x-y&=0\\ x+y&=0 \end{aligned}$$

resolviendo este sistema obtenemos que la única solución es $x=0$ y $y=0$. Por lo tanto $\mathrm{Nuc}T=\{(0,0)\}$ y en consecuencia T es un monomorfismo.
Para analizar si es un epimorfismo podemos tomar una base del dominio, es decir de $\mathbb{R}^2$ y ver si se convierte en una base del codominio, es decir de $\mathbb{R}^2$. Si esto ocurre, entonces por el Teorema 1.6 podremos asegurar que T es un epimorfismo.
Consideremos entonces la base canónica $E=\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Luego

$$\begin{aligned} T(1,0)&=(2,1)\\ T(0,1)&=(-1,1). \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que el conjunto $B'=\{(2,1),(-1,1)\}$es linealmente independiente, entonces es una base de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto $\{T(1,0),T(0,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^3$y en consecuencia T es un epimorfismo.
Otra forma de probar que es un epimorfismo es la siguiente. La base de la imagen se puede determinar directamente a partir de la expresión de T

$$T(x,y)=(2x-y,x+y)=x(2,-1)+y(-1,1).$$

Entonces todo vector de la imagen es combinación lineal de los vectores $(2,1)$ y $(-1,1)$. Luego B' es una base de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto T es un epimorfismo.

Teorema 1.7

Sea $T:V\to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales. Entonces

$$\dim V=\dim(\mathrm{Nuc}T)+\dim(\mathrm{Img}T)$$

.

Ahora veremos un importante resultado que habla sobre los isomorfismos entre espacios de dimensión finita. Sabemos que toda transformación lineal $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es de la forma $T=T_A$ para alguna matriz A de tamaño $m\times n$. Justamente A es la *matriz estandar*. En el próximo teorema especificamos cuando estas clases de transformacione lineales son monomorfismos y epimorfismos.

Teorema 1.8

Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una transformación lineal definida por $T(\vec{x})=A\vec{x}$. Entonces

1. T es epimorfismo sii $\mathrm{Co}(A)=\mathbb{R}^m$ sii $\mathrm{rg}(A)=m$.
2. T es un monomorfismo sii $\mathrm{rg}(A)=n$.

Ejemplo 1.1

Estudiar si transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=(x-y,2x,x+y)$ es epimorfismo y un monomorfismo.

Solución
Primero hallamos la transformación estandar de T

$$T(x,y) = (x-y, 2x, x+y) = x(1,2,1) + y(-1,0,1)$$

.
Entonces

$$A = [T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces es inmediato comprobar que los dos vectores columna son linealmente independientes. Por lo tanto $\dim \mathrm{Co}(A) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Entonces no puede ser un epimorfismo.
También podríamos razonar encontrando un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \notin \mathrm{Img}T$. Por ejemplo, el $(0,2,0)$ no está en la imagen de T, pues en caso contrario debería ocurrir que $(0,2,0) = (x-y, 2x, x+y)$ para algún $x, y \in \mathbb{R}$. Pero de esta igualdad se desprende que $x - y = 0$, $x = 1$ y $x + y = 0$, lo que es imposible.
Como $\mathrm{rg}(A) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, entonces T es monomorfismo.

Ahora presentamos la noción de inversa de una transformación lineal. Recordemos que una función $f : A \to B$ tiene inversa si existe una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$y $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Se puede comprobar que

f tiene inversa sii f es biyectiva.

En el contexto de transformaciones lineales podemos dar una definición totalmente análoga.

Definición 1.1

Una transformación lineal $T : V \to W$ es invertible si existe una transformación lineal $T^{-1} : W \to V$, llamada inversa de T, tal que

$$T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_W \text{ y } T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V.$$

N El dominio V y el codominio W de la transformación T no tienen que ser el mismo espacio vectorial. Pero sin embargo, si trabajamos con espacios de dimensión finita, los dos espacios deben tener la misma dimensión.
En la definición se pide que la función T^{-1} sea lineal. Este requisito se puede omitir, ya que no es difícil demostrar que si $T : V \to W$ es una transformación y que existe una función $F : W \to V$ tal que $T \circ F = \mathrm{Id}_W$ y $F \circ T = \mathrm{Id}_V$, entonces F es también una transformación lineal.

los siguientesresultados nos restringimos al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.9

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea A la matriz estandar de T. Entonces T es invertible si y sólo si A es invertible. En este caso

$$[T]^{-1} = [T^{-1}].$$

Teorema 1.10

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea A la matriz estandar de T. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es un isomorfismo.
2. T es un monomorfismo.

3. T es invertible.
4. $\text{Nuc}T = \left\{\vec{0}\right\}$.
5. $\text{N}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.
6. A es invertible.
7. T es un epimorfismo.
8. $\text{Co}(A) = \mathbb{R}^n$.
9. $\text{rg}(A) = n$.
10. $\det A \neq 0$.

En las condiciones del teorema anterior, no es necesario analizar inyectividad y sobreyectividad separadamente ya que una de ellas implica la otra y por lo tanto, que se cumpla una de ellas implica que la transformación lineal es biyectiva. Esto sólo ocurre cuando el dominio y el codominio tienen la misma dimensión.

Ejemplo 1.1

Analizar si la siguiente transformación lineal tiene inversa. En caso positivo determinar su inversa.

$$T\left(x,y,z\right) = \left(3x+2y-z,-x+y-2z,-x-y+z\right).$$

Solución

La matriz estandar de la transformación T es

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para saber si es invertible podemos estudiar su rango. Si el rango es 3, entonces $[T]$ es invertible. También podemos calcular su determinante. Si es distinto de cero, entonces la matriz $[T]$será invertible. En cualquier caso nos piden que hallemos su inversa. Por lo tanto nos conviene calcular la matriz inversa $[T]^{-1}$y después hallar la transformación asociada. Calculando la inversa por algún método, obtenemos

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la transformación inversa es

$$T^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y+z \\ \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y-z \\ -y-z \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y+z,\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y-z,-y-z\right).$$

Ejemplo 1.2

Analizar si las transformaciones dadas por las matrices indicadas son monomorfismo, epimorfismos e isomorfismos.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tenemos una transformación $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Hacemos una tabla con la dimensión del dominio de cada transformación, la dimensión de la imagen. Recordemos que $\mathrm{Img}T_A = \mathrm{Co}(A)$, por lo tanto T_A es sobreyectiva si $\mathrm{Img}T_A = \mathrm{Co}(A) = m$.

$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$\dim \mathbb{R}^n$	$\dim \mathrm{Img}T$	$\dim \mathrm{Nuc}T$	inyectiva	sobreyectiva
1. $T_{A_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	3	3	0	si	si
2. $T_{A_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	3	2	1	no	si
3. $T_{A_3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	2	2	1	si	no
4. $T_{A_4} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	3	2	1	no	no

Ejemplo 1.3

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = A\,v$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar si existe algún valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que T sea un monomorfismo.
2. Para $k = -1$, determinar el núcleo y la imagen de T.

Solución

1. La expresión analítica de la transformación lineal es

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+z \\ x+kz \\ x+ky-z \end{pmatrix}$$

Entonces, recordemos que:
T es monomorfismo sii $\mathrm{Nuc}T = \left\{\vec{0}\right\}$ sii el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene solución única sii $\mathrm{rg}(A) = 3$ sii $\det(A) \neq 0$.
Por lo tanto calculamos el determinante de A:

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} &= 2k+k+k^2+2 = k^2+3k+2 \\ &= (k+2)\,(k+1) \end{aligned}$$

Luego es sencillo comprobar que

$$\det(A) \neq 0 \text{ sii } k \neq -2 \text{ y } k \neq -1.$$

Por lo tanto,

$$T \text{ es monomorfismo sii } k \neq -2 \text{ y } k \neq -1.$$

Por el Teorema de la dimensión,

$$\dim \mathrm{Nuc} T + \dim \mathrm{Img} T = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Como $\dim \mathrm{Nuc} T = 0$, entonces $\dim \mathrm{Img} T = 3$. Por lo tanto T es un isomorfismo.
2. Si $k = -1$, entonces T no es un momonorfismo. La transformación lineal en este caso tiene como expresión analítica a

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+z \\ x-z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

Calculemos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathrm{Nuc} T = \left\{ v : T(v) = Av = \vec{0} \right\}$, entonces $(x,y,z) \in \mathrm{Nuc} T$ sii

$$\begin{cases} -x+2y+z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos $y+0$ y $x = z$. Entonces

$$\mathrm{Nuc} T = \{(x,0,x)\} = \langle (1,0,1) \rangle.$$

Para obtener una base de $\mathrm{Img} T$ debemos recordar que

$$\mathrm{Img} T = \mathrm{Co}(A).$$

El espacio columna de A está generado por los vectores columna de A que corresponden a los pivotes en una forma escalonada de A. En este caso las dos primeras columnas generan al espacio columna y por lo tanto a la imagen de T:

$$\mathrm{Img} T = \langle (-1,1,1),(2,0,-1) \rangle.$$

1.6. Matriz asociada a una transformación lineal

En el Lema 1.1 vimos que cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ define una transformación lineal como $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Además vimos en los ejemplos 1.1 y 1.2 que cada una de estas transformaciones tiene asociada una matriz, llamada la *matriz estandar*, que permite definir completamente a la transformación cuando trabajamos en las bases canónicas. ¿Pero que ocurre si estamos trabajando con otras bases? En estos casos también podemos definir una matriz que nos permite determinar las *coordenadas* de las imagenes de los vectores. Ahora veremos como calcular estas matrices

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente. Sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_2\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_{m\ldots}\}$ una base de W. Consideramos a las bases ordenadas. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Para cada vector $v \in V$ existen únicos escalares $c_1, \dots, c_n$ tales que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Consideremos la imagen de v por medio de T, es decir

$$T(v) = d_1 w_1 + \cdots + d_m w_m$$

la expresión en coordenadas de $T(v)$ en la base B_2. Queremos estudiar que conexión existe entre $[v]_{B_1}$ y $[T(v)]_{B_2}$. Vamos a ver como construir una matriz que transforma las coordenadas de v en la base B_1 a las coordenadas de $T(v)$ en la base B_2.

Teorema 1.11

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente. Sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_2\}$ una base de V y B_2 una base de W. Consideremos una transformación lineal $T : V \to W$. Entonces la matriz $[T]_{B_1 B_2}$ de $m \times n$ cuyas n columnas corresponden a $[T(v_i)]_{B_2}$ es decir la matriz

$$[T]_{B_1 B_2} = ([T(v_1)]_{B_2} \dots [T(v_n)]_{B_2}),$$

cumple que

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1 B_2} [v]_{B_1},$$

para cada vector $v \in V$.

La matriz $[T]_{B_1 B_2}$ se llama matriz de T respecto de las bases B_1 y B_2, o matriz de transición de la base B_1 a la base B_2. La base B_1 se llama base de partida y la base B_2 se llama base de llegada. Otras notación utilizada usualmente para denotar a la matriz asociada a una transformación T respecto a la base B_1 y a la base B_2 es $M_{B_1 B_2}(T)$.

La matriz $A = [T]_{B_1 B_2}$ permite pasar las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base B_1 a las coordenadas de su imagen $T(v) \in W$ en la base B_2 como se muestra en el siguiente diagrama. Recordemos que T_A es la transformación definida por la matriz A:

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(v) \arrow[d] \\
{[v]_{B_1}} \arrow[r, "T_A"] & A\,[v]_{B_1} = [T(v)]_{B_2}
\end{tikzcd}$$

A continuación especificamos los pasos a seguir para construir la matriz $[T]_{B_1 B_2}$.

1. Se calculan los transformados de los vectores $v_1, \dots, v_n$, por medio de T, es decir los vectores $T(v_1), \dots, T(v_n)$.
2. Se escribe cada vector $T(v_1), \dots, T(v_n)$ en terminos de la base B_2. De esta forma obtenemos las coordenadas de cada vector $T(v_1), \dots, T(v_n)$ en la base B_2.
3. Con estas coordenadas se forma la matriz $[T]_{B_1 B_2}$ asociada a la transformación T en las bases B_1 y B_2.

N Algunos comentarios:

1. Si trabajamos sobre el mismo espacio vectorial, es decir si $V = W$, y $B = \{v_1, \dots, v_2\}$ es una base de V, entonces la matriz de una transformación $T : V \to V$ en la base B se denota por $[T]_B$ y se llama matriz de T respecto a la base B. En este caso el Teorema 1.6 afirma que

$$[T(v)]_B = [T]_{BB} [v]_B,$$

para cada $v \in V$.

2. La matriz de la transformación $Id : V \to V$ de la base B_1 a la base B_2 es la matriz de cambio de base $P_{B_1B_2}$ pues

$$\begin{aligned}[I]_{B_1B_2} &= ([I(v_1)]_{B_2} \dots [I(v_n)]_{B_2}) \\ &= \left([v_1]_{B_2} \dots [v_n]_{B_2}\right) = P_{B_1B_2}.\end{aligned}$$

3. La matriz $[T]_{B_1B_2}$ depende del orden de los vectores de las B_1 y B_2. Si reordenamos los vectores de alguna de las bases esto afectará a la matriz $[T]_{B_1B_2}$.

4. Si tenemos una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y si E_n y E_m son las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$,respectivamente, entonces se puede probar que

$$[T]_{EE} = [T] \text{ matriz estandar de } T.$$

Ejemplo 1.1

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y) = (x+2y, x-y).$$

1. Determinar la matriz estandar $[T]$ y la matriz de transformación $[T]_{B_1B_2}$, en la bases

$$B_1 = \{(1,-1),(0,1)\} \text{ y } B_2 = \{(2,-1),(1,-1)\}.$$

2. Calcular la imagen del vector $v = (3,2)$ primero utilizando directamente la transformación y después utilizando la matriz $[T]_{B_1B_2}$.

Solución

1. La matriz estandar $[T]$ se forma directamente calculando las imagenes de los vectores canónicos. Es decir,

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,1) \\ T(0,1) &= (2,-1) \end{aligned}$$

Luego

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

También podemos calcular la matriz estandar si tenemos la expresión analítica. En este caso conviene escribir a la transformación con vectores columnas. Es decir

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{[T]}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto llegamos al mismo resultado.
Para calcular la matriz $[T]_{B_1B_2}$ debemos determinar la imagen por medio de T de cada vector de la base B_1 y después encontrar las coordenadas de los vectores que se obtienen en la base B_2. Calculamos entonces las imagenes de los vectores de la base B_1.

$$\begin{aligned} T(1,-1) &= (-1,2) \\ T(0,1) &= (2,-1). \end{aligned}$$

Ahora buscamos las coordenadas en la base B_2 de cada vector obtenido.

$$(-1,2) = \alpha(2,-1) + \beta(1,-1).$$

Resolvemos este sistema y obtenemos

$$[T(1,-1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Hacemos lo mismo con el vector $T(0,1) = (2,-1)$,

$$(2,1) = \alpha(2,-1) + \beta(1,-1).$$

y resolviendo el sistema, obtenemos las coordenadas

$$[T(0,1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$[T]_{B_1B_2} = ([T(1,-1)]_{B_2}\ [T(0,1)]) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calculamos la imagen del vector $v = (3,2)$ utilizando la expresión analítica de la transformación. Como $T(x,y) = (x+2y, x-y)$, tenemos que

$$T(3,2) = (7,1).$$

Ahora vamos a calcular la imagen de v, pero utilizando la matriz $[T]_{B_1B_2}$. De acuerdo al Teorema 1.6,

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1B_2}\ [v]_{B_1}.$$

Entonces debemos calcular primero $[v]_{B_1} = [(3,2)]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$(3,2) = \alpha(2,-1) + \beta(1,-1).$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$[(3,2)]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1B_2}\ [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Conociendo las coordenadas de $T(v)$ en la base B_2 ahora podemos calcular el vector $T(v)$ por medio de la fórmula $T(v) = M_{B_2}\ [T\ (v)]_{B_2}$ o directamente

$$T(v) = 8\,(2,-1) + (-9)\,(1,-1) = (16-9, -8+9) = (7,1).$$

Obviamente este es el resultado esperado, ya que el transformado de un vector es único y por lo tanto *no* depende de la base.

Para el caso de transformaciones $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ podemos dar un método o algorítmo que nos permite calcular la matriz $[T]_{B_1B_2}$.

Supongamos que tenemos una base $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$. Para hallar la representación matricial de T en las bases B_1 y B_2 debemos hallar las coordenadas de cada vector

$T(v_i)$ en la base B_2, es decir, debemos hallar $[T(v_i)]_{B_2}$. Si escribimos la matriz que tiene por columnas a los vectores de la base B_2, entonces para hallar $[T(v_i)]_{B_2}$ deberíamos habría que considerar el sistema aumentado

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m \mid T(v_i)).$$

Este sistema tienen solución única al ser los coeficientes de la descomposición de un vector con respecto a una base, por lo que al realizar el método de Gauss-Jordan el sistema aumentado cambia según

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m \mid T(v_i)) \xrightarrow{\text{aplicamos Gauss-Jordan}} (e_1, e_2, \ldots, e_m \mid [T(v_i)]_{B_2}).$$

El procedimiento anterior se puede realizar simultanemente para cada vector $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$. Por lo tanto para determinar la matriz de T asociada a las bases B_1 y B_2 construímos el sistema aumentado siguiente

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m \mid T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)).$$

Aplicamos Gauss-Jordan hasta obtener la siguiente matriz

$$\left(e_1, e_2, \ldots, e_m \mid \underbrace{[T(v_1)]_{B_2}, [T(v_2)]_{B_2}, \ldots, [T(v_n)]_{B_2}}_{[T]_{B_1 B_2}} \right).$$

Ejemplo 1.2

Resolver el apartado 1 del ejemplo 1.6 utilizando el método descripto anteriormente.
Primero calculamos las imagenes por medio de T de los vectores de $B_1 = \{(1,-1),(0,1)\}$. Es decir,

$$T(1,-1) = (-1,2)$$
$$T(0,1) = (2,-1).$$

Ahora formamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|cc} u_1 & u_2 & T(v_1) & T(v_2) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

donde $B_2 = \{u_1, u_2\} = \{(2,-1),(1,-1)\}$. Escalonamos hasta completar que la primer matriz sea la identidad

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right)}_{\left(I_2 | [T]_{B_1 B_2}\right)}.$$

Entonces obtenemos matriz $[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Recordemos que dada una transformación lineal sobre el mismo espacio $T : V \to V$, y dada una base B de V, la matriz $[T]_B$ se llama la matriz de la transformación T. Ahora si cambiamos de base entonces la matriz cambia. Es decir, para bases B_1y B_2 diferentes, las matrices $[T]_{B_1}$ y $[T]_{B_2}$ son diferentes.

Entonces surge inmediatamente la siguiente pregunta

¿Como se relacionan las matrices $[T]_{B_1}$ y $[T]_{B_2}$?

Ahora veremos como están conectadas las matrices $[T]_{B_1}$ y $[T]_{B_2}$.

Teorema 1.12

Sea V un espacio de dimensión finita. Sea $T : V \to V$ una tranformación lineal. Sean B_1 y B_2 bases de V. Entonces la matriz de transformaciones $[T]_{B_1}$ y $[T]_{B_2}$ están relacionadas por la siguiente igualdad:

$$[T]_{B_2} = P_{B_1B_2}.[T]_{B_1} P_{B_2B_1}. \tag{1.1}$$

Podemos hacer el siguiente diagrama que ilustra la situación planteada en el Teorema anterior

$$\begin{tikzcd}
V & V \\
{[v]_{B_1}} \arrow[r, "{[T]_{B_1}}"'] & {[T(v)]_{B_2}} \arrow[d, "P_{B_1B_2}"] \\
{[v]_{B_2}} \arrow[u, "P_{B_2B_1}"] \arrow[r, "{[T]_{B_2}}"'] & {[T(v)]_{B_2}}
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, si queremos determinar el vector de coordenadas $[T(v)]_{B_2}$ desde el vector de coordenadas $[v]_{B_2}$, de acuerdo al diagrama anterior, tenemos dos posibles caminos.

- Un es directo y que se hace por medio de la matriz de la transformación lineal $[T]_{B_2}$. Por este camino tenemos la siguiente identidad:
  $$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_2}[v]_{B_2}.$$
  Pero este camino requiere conocer previamente la matriz $[T]_{B_2}$.
- El otro camino es más largo y se utiliza las matrices de cambio de base $P_{B_2B_1}$ y $P_{B_1B_2}$. Primero calculamos la matriz $[T]_{B_2}$ por medio de la igualdad
  $$[T]_{B_2} = P_{B_1B_2}.[T]_{B_1} P_{B_2B_1}.$$
  y entonces hallamos las coordendas $[T(v)]_{B_2}$ por medio de
  $$\begin{aligned}[T(v)]_{B_2} &= [T]_{B_2}[V]_{B_2}\\ &= \left(P_{B_1B_2}.[T]_{B_1} P_{B_2B_1}\right)[V]_{B_2}\end{aligned}$$

Podemos simplicar en algunos casos particulares.

Como
$$P_{B_2B_1} = (P_{B_1B_2})^{-1}, \text{ y } P_{B_1B_2} = (P_{B_2B_1})^{-1},$$
entonces la identidad (1.1) la podemos expresar en la siguiente forma

$$\boxed{[T]_{B_2} P_{B_1B_2} = P_{B_1B_2}.[T]_{B_1}. \qquad (1.2)}$$

Transformaciones sobre $\mathbb{R}^n$

Para el caso puntual de una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y una base B de $\mathbb{R}^n$ de la ecuación tenemos la siguiente situación. Recordemos que M_B es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base B. Como

$$P_{BE} = M_B,$$

entonces por la identidad (1.2) obtenemos

$$\boxed{[T]\, M_B = M_B\, [T]_B. \qquad (1.3)}$$

En el ejemplo 1.6 nos dan la expresión analítica de la transformación y las bases de cada espacio. Con esa información determinamos la matriz de la transformación y la imagen de un vector. Otra posibilidad que se puede presentar es que nos den directamente la matriz de transformación y nos pidan determinar la expresión analítica de la transformación, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1

Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Determinar la matriz $[T]_B$ donde $B=\{(1,0),(1,-1)\}$ sabiendo que la matriz estandar es $[T]=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Solución

Vamos a resolver este ejercicio de dos formas diferentes.
Primero podemos aplicar la identidad (1.3). Como $[T]\,M_B=M_B\,[T]_B$, y la matriz asociada a la base B es $M_B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, entonces

$$[T]_B=M_B^{-1}[T]M_B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

La otra forma es determinar la transformación lineal utilizando la matriz estandar y después hallar las coordenadas de los vectores de la base B en la misma base. Es decir,

$$T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=[T]_B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2x-y\\ x+y\end{pmatrix}.$$

Escribimos la transformación como fila $T(x,y)=(2x-y,x+y)$, y calculamos las imagenes de los vectores de la base B:

$$T((1,0))=(2,1)\ \text{y}\ T((1,-1))=(3,0).$$

Ahora hallamos las coordenadas de estos vectores en la base B.

$$(2,1)=c_1(1,0)+c_2(1,-1)=(c_1+c_2,-c_2).$$

Entonces $c_1=3$ y $c_2=-1$. Luego

$$[T((2,1))]_B=(3,-1)^t.$$

De igual forma podemos hallar que

$$[T((1,-1))]_B=(3,0)^t,$$

y por lo tanto

$$[T]_B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ahora veremos un ejemplo donde las dos bases sean no estandar.

Ejemplo 1.2

Consideremos una transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Sean $B=\{(-1,2),(0,1)\}$ y $B'=\{(2,1),(1,1)\}$

dos bases. Si $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz de T respecto a la base B. Determinar

1. $[T]_{B'}$ y $[T]$.
2. Hallar $[v]_B$, $[T(v)]_B$ y $[T(v)]_{B'}$ sabiendo que $[v]_{B'} = (3,2)^t$.

Solución

---

1. Para hallar $[T]_{B'}$ vamos a aplicar la identidad

$$[T]_{B'} = P_{BB'}[T]_B P_{B'B}.$$

Primero debemos hallar las matrices de cambio de base $P_{BB'}$ y $P_{B'B}$. Únicamente debemos hallar una de las matrices, la otra se obtiene por medio de la inversa. Calculamos

$$P_{BB'} = \left([v_1]_{B'}\ [v_2]_{B'}\right),$$

donde $B = \{v_1, v_2\}$. Debemos hallar la combinación lineal del vector $v_1 = (-1,2)$ en la base B' y lo mismo para el vector $v_2 = (0,1)$. Entonces planteamos las identidades

$$(-1,2) = c_1(2,1) + c_2(1,1)$$

y

$$(0,1) = d_1(2,1) + d_2(1,1).$$

escalonamos la siguiente matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

Entonces $2c_1 = -6$ y $-c_2 = -5$, es decir $c_1 = -3$ y $c_2 = 5$. Luego $[v_1]_{B'} = (-3,5)^t$. De igual forma, $2d_1 = -2$ y $-d_2 = -2$, es decir, $d_1 = -1$ y $d_2 = 2$. Luego $[v_2]_{B'} = (-1,2)^t$. Por lo tanto

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$P_{B'B} = (P_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} [T]_{B'} &= P_{BB'}[T]_B P_{B'B} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -24 & -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora debemos hallar la matriz estandar. Como

$$[T] = P_{BE}[T]_B P_{EB}$$

y recordando que $P_{BE} = M_B$ y $P_{EB} = M_B^{-1}$, entonces es sencillo calcular el anterior producto de matrices. Queda como ejercicio.

2. Debemos hallar primero $[v]_B$. En este caso aplicamos la matriz de transición $P_{B'B}$

$$[v]_B = P_{B'B}[v]_{B'} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Para hallar $[T(v)]_B$ y $[T(v)]_{B'}$ aplicamos las identidades

Ejemplo 1.3

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Consideremos las bases

$$B_1 = \{(1,0,0), (-1,1,0), (0,0,2)\} \text{ y } B_2 = \{(1,1), (0,1)\}.$$

de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sea

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matriz de transformación de T en las bases B_1 y B_2 .

1. Hallar los vectores $T(1,0,0)$,$T(-1,1,0)$ y $T(0,0,2)$ utilizando la matriz $[T]_{B_1B_2}$.
2. Hallar la matriz estandar $[T]$ utilizando los vectores hallados en el punto 1 y luego hallar la expresión analítica de T.
3. Determinar la expresión analítica de T con los datos del ítem 1 y luego la matriz estandar.
4. Hallar la matriz estandar utilizando el método descripto en el Teorema 1.6.
5. Determinar la imagen de $v = (-1,2,-4)$ utilizando la matriz estandar y la matriz $[T]_{B_1B_2}$.

Solución

Antes de comenzar la resolución es importante remarcar que datos tenemos para encarar el problema. Como dato tenemos una base B_1 de $\mathbb{R}^n$, una base B_2 de $\mathbb{R}^m$, y la matriz de la transformación $[T]_{B_1B_2}$. Por lo tanto nos están dando las coordenadas en la base B_2 de cada vector $T(v)$, para cada vector $v \in B_1$. Es decir, tenemos como dato

$$[T((1,0,0))]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ [T((-1,1,0))]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ [T((0,0,2))]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinemos los vectores $T(1,0,0)$, $T(-1,1,0)$ y $T(0,0,2)$.
Cada uno de estos vectores se expresa como combinación lineal de los vectores de la base B_2. Ya que tenemos como dato las coordenadas de estos vectores (son las columnas de la matriz $[T]_{B_1B_2}$) y la matriz B_2, entonces es posible determinar cada uno de esos vectores utilizando la fórmula

$$T(v) = c_1(1,1) + c_2(0,1),$$

donde c_1 y c_2 son las coordenadas de $T(v)$ en la base B_2 (que corresponden a las columnas de la matriz $[T]_{B_1B_2}$). Esto es lo mismo que escribir

$$T(v) = M_{B_2}[T(v)]_{B_2}$$

Entonces procedemos a calcular los vectores $T(1,0,0)$, $T(-1,1,0)$, $T(0,0,2)$:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= 1.(1,1) + 2.(0,1) = (1,3) \\ T(-1,1,0) &= (-1).(1,1) + 1.(0,1) = (-1,0) \\ T(0,0,2) &= 0.(1,1) + (-1).(0,1) = (0,-1). \end{aligned}$$

2. Determinarla matriz estandar $[T]$ y la expresión analítica de T con los datos del ítem 2.
Cuando hemos encontrado las imagenes de los vectores de la base B_1, es decir, cuando ya tenemos $T(1,0,0)$, $T(-1,1,0)$ y $T(0,0,2)$ debemos determinar las imagenes de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ para hallar la matriz estandar $[T]$. Es decir, debemos determinar $T(e_1)$, $T(e_2)$ y $T(e_3)$. Observemos que podemos formar el siguiente sistema

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= T(e_1) = (1,3) \\ T(-1,1,0) &= T((-1)(1,0,0)+(0,1,0)) = -T(e_1) + T(e_2) = (-1,0) \\ T(0,0,2) &= T((2)(0,0,1)) = 2T(e_3) = (0,-1). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (1,3) \\ -T(e_1)+T(e_2) &= (-1,0) \\ 2T(e_3) &= (0,-1). \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$T(e_2) = (-1,0)+T(e_1) = (-1,0)+(1,3) = (0,3).$$

De la tercer ecuación obtenemos

$$T(e_3) = \left(0,-\frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto la matriz estandar es

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con la matriz estandar podemos hallar la expresión analítica, ya que $T(v) = [T(v)]$, para cualuier $v \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = [T]_E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ 3x+3y-\frac{1}{2}z \end{pmatrix}.$$

3. Determinar la expresión analítica de T con los datos del ítem 1, y luego determinar la matriz estandar. En este caso primero hallamos las coordenadas de un vector genérico $v = (x,y,z)$ en la base B_1 y después aplicamos T y hallamos las coordenadas de $T(x,y,z)$ en la base B_1.
Sea $v = (x,y,z)$ un vector de $\mathbb{R}^3$ y lo expresamos como combinación lineal de los vectores de la base B_1

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,0)+\beta(-1,1,0)+\gamma(0,0,2).$$

Luego obtenemos un sistema

$$\begin{aligned} x &= \alpha-\beta \\ y &= \beta \\ \gamma &= 2\gamma \end{aligned}$$

Escrito en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z}{2} \end{array}\right)$$

Lo resolvemos y llegamos a las identidades $\alpha = x+y$, $\beta = y$ e $\gamma = \frac{z}{2}$. De esta forma conocemos las coordenadas de (x,y,z) en la base B_1. Es decir,

$$[(x,y,z)]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

Luego, cualquier vector $V=(x,y,z)$ queda expresado en la base B_1 como:

$$(x,y,z)=(x+y)(1,0,0)+y(-1,1,0)+\frac{z}{2}(0,0,2)$$

Aplicamos T a la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
T(x,y,z)&=(x+y)T(1,0,0)+yT(-1,1,0)+\frac{z}{2}T(0,0,2)\\
&=(x+y)(1,3)+y(-1,0)+\frac{z}{2}(0,-1)\\
&=(x+y,3x+3y)+(-y,0)+(0,-\frac{z}{2})\\
&=(x,3x+3y-\frac{z}{2}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión analítica de la transformación T es

$$T(x,y,z)=(x,3x+3y-\frac{z}{2}).$$

A partir de la expresión analítica podemos determinar la matriz estandar $[T]=[T]_E$:

$$\begin{aligned}
T(x,y,z)=(x,3x+3y-\frac{z}{2})&=x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces la matriz estandar es

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

4. Ahora nos piden hallar la matriz estandar pero utilizando el método descripto en el Teorema 1.6. Por lo tanto tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{B_1}} \arrow[r, "{[T]_{B_1B_2}}"] & {[T(v)]_{B_2}} \arrow[d, "P_{B_2E}"] \\
{[v]_E=v} \arrow[u, "P_{EB_1}"] \arrow[r, "{[T]_{EE}=[T]}"] & {[T(v)]_E=T(v)}
\end{tikzcd}$$

$$[T]=P_{B_2E}\,[T]_{B_1B_2}\,P_{EB_1}$$

Recordemos que M_B denota la matriz que se forma tomando los vectores de una base B como columnas. Como

$$\begin{aligned}
P_{EB_1}&=(P_{B_1E})^{-1}=M_{B_1}^{-1}\\
P_{B_2E}&=M_{B_2},
\end{aligned}$$

entonces debemos calcular el siguiente producto de matrices

$$[T]=M_{B_2}\,[T]_{B_1B_2}\,M_{B_1}^{-1}.$$

Las matrices asociadas a las bases dadas son

$$M_{B_1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\text{ y }M_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa de M_{B_1} y obtenemos

$$M_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por último

$$\begin{aligned}[T] &= M_{B_2}\,[T]_{B_1B_2}\,M_{B_1}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. Determinemos la imagen de $v = (-1, 2, -4)$ utilizando la matriz estandar y la matriz $[T]_{B_1B_2}$. Para esta parte vamos a utilizar la notación de los vectores como vectores columna.

Sea $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Calculemos $T(v)$ utilizando la matriz estandar

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = [T]_E\,v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a calcular $T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ pero utilizando $[T]_{B_1B_2}$. Recordemos que

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1B_2}\,[v]_{B_1}.$$

Entonces primero debemos determinar las coordenadas de v en la base B_1, es decir $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cáculos obtenemos

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\left[T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Finalmente determinamos $T(v)$

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente. El rango de matriz $[T]_{B_1B_2}$ es igual a la cantidad de vectores linealmente independiente del conjunto de vectores $\left\{[T(v_1)]_{B_2}, \dots, [T(v_n)]_{B_2}\right\}$, y esto es igual a la cantidad de vectores linealmente independiente del conjunto $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ y ya sabemos que este número es la dimensión de la imagen de T. Por lo tanto podemos afirmar

$$\mathrm{rg}([T]_{B_1B_2}) = \mathrm{dim}\mathrm{Img}T.$$

SI $T : V \to W$ es una transformación lineal, con B_1 una base de V y B_2 una base de W, veremos a continuación las relaciones entre el espacio nulo de la matriz

$$\mathrm{N}\left([T]_{B_1B_2}\right) = \left\{v \in V : [T]_{B_1B_2}\, v = \vec{0}\right\},$$

y el núcleo de la transformación, y entre el espacio columna de la matriz $[T]_{B_1B_2}$y la imagen de la transformación.

Teorema 1.13

Dadas la transformación lineal $T : V \to W$ con V y W de dimensión finita, y las bases B_1 y B_2 de V y W de dimensión finita, , respectivamente. Si $A_T = [T]_{B_1B_2}$ es la matriz de transformación respecto a las bases dadas, entonces

1. $v \in \mathrm{Nuc}T$ si y sólo si $[v]_{B_1} \in \mathrm{N}(A_T)$.
2. $w \in \mathrm{Img}T$ si y sólo si $[w]_{B_2} \in \mathrm{Co}(A_T)$.

Como consecuencia del Teorema anterior, si $T : V \to W$ es una transformación lineal entre espacios de dimensión finita, una cambio de base no afecta en cuanto a que T es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo. Lo único que cambia es la matriz de transformación, no el tipo de transformación. Por lo tanto tampoco cambia la dimensión del núcleo Nuc o de la imagen $\mathrm{Img}T$.

Corolario 1.1 Sea la transformación lineal $T : V \to W$ con V y W espacios vectoriales de dimensión finita, y las bases B_1 y B_2 de V y W, respectivamente. Si $A_T = [T]_{B_1B_2}$ es la matriz de transformación respecto a las bases dadas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. $\mathrm{Nuc}T = \left\{\vec{0}\right\}$.
2. $\mathrm{N}(A_T) = \left\{\vec{0}\right\}$.
3. $\mathrm{rg}(A_T) = \mathrm{dim}V$.

Ejemplo 1.1

Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Supongamos que la matriz de transformación de una base B_1 a una base B_2 es $[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es T un isomorfismo?

Solución

Para verlo hacemos lo mismo que antes y no nos preocupamos por el hecho que esté en otra base. Es decir, tomamos la matriz de transformación, aplicamos Gauss, y vemos cual es el rango de la matriz.

Si el rango es 3, entonces $\dim T = 3$ (y sería T un epimorfismo) y por el Teorema de la dimensión, $\dim \mathrm{Nuc} T + \dim \mathrm{Img} T = \dim \mathbb{R}^3$. Es decir, $\dim \mathrm{Nuc} T + 3 = 3$, y en consecuencia $\mathrm{Nuc} T = \{(0,0,0)\}$, y con esto sería T un monomorfismo. Entonces calculemos el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, $\mathrm{rg}([T]_{B_1 B_2}) = 3$ y en consecuencia $\dim \mathrm{Img} T = 3$ y $\mathrm{Nuc} T = \{(0,0,0)\}$, es decir, T es un isomorfismo.

Ejemplo 1.2

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal y sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

la matriz de transformación de una base B_1 a una base B_2. Estudiar si T es un monomorfismo.

Solución

Igual que antes, debemos analizar si $\mathrm{Nuc} T = \left\{ \vec{0} \right\}$, pero por el Corolario anterior es lo mismo estudiar el rango de la matriz A. Entonces escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathrm{rg}(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Por lo tanto T es inyectiva. Observemos que no puede ser sobreyectiva, ya que $\dim \mathbb{R}^3 = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

y

N Matriz cambio de base Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y B_2 dos bases de $\mathbb{R}^n$. En la sección **??** estudiamos como construir una matriz que nos permitía cambiar las coordenadas de un vector v en la base B_1 a las coordenadas de v en la base B_2. Esta matriz se llama matriz cambio de base y la simbolizamos con $P_{B_1 B_2}$. Ahora veremos que esta matriz se puede obtener como la matriz de la transformación identidad respecto a las bases B_1 y B_2.
Primero recordemos que la matriz de cambio de base respecto a las bases B_1 y B_2 está dada por

$$P_{B_1 B_2} = \left([v_1]_{B_2} \mid \cdots \mid [v_n]_{B_2} \right) ,$$

es decir, las columnas de la matriz $P_{B_1 B_2}$ son las coordendas de cada vector $v_i \in B_1$ en la base B_2. Consideremos la transformación lineal identidad, es decir, la transformación lineal:

$$Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad Id(v) = v \text{ para cada } v \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces la matriz de transformación de Id respecto a las bases B_1 y B_2 es

$$\begin{aligned}[Id]_{B_1B_2} &= \left([Id(v_1)]_{B_2} \mid \cdots \mid [Id(v_n)]_{B_2}\right)\\ &= \left([v_1]_{B_2} \mid \cdots \mid [v_n]_{B_2}\right)\\ &= P_{B_1B_2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{[Id]_{B_1B_2} = P_{B_1B_2}.}$$

Ahora vemos como actuan los cambios de bases en la suma de dos transformaciones lineales y en la tranformación que se obtiene con el producto de un escalar.

Teorema 1.14

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita. sea B una base ordenada de V y $B^{'}$ una base ordenada de W. Si T y F son dos transformaciones lineales de V en W, entonces

1. $[T+F]_{B_1B_2} = [T]_{B_1B_2} + [F]_{B_1B_2}$.
2. $[kT]_{B_1B_2} = k\,[T]_{B_1B_2}$, para cualquier escalar $k \in \mathbb{R}$.

En caso particular que T y F sean transformaciones sobre un mismo espacio vectorial V y B es una base ordenada de V, tenemos que

$$[T+F]_B = [T]_B + [F]_B\,.$$

Ahora vamos a estudiar como determinar la matriz de la composición de dos transformaciones lineales.

Teorema 1.15

Consideremos las transformaciones lineales

$$T : V_1 \rightarrow V_2 \text{ y } F : V_2 \rightarrow V_3.$$

Consideremos las bases ordenadas B_1, B_2 y B_3 de V_1, V_2 y V_3, respectivamente. Entonces

$$[F\circ T]_{B_1B_3} = [F]_{B_2B_3}\,[T]_{B_1B_2}\,.$$

El siguiente diagrama nos ayuda a recordar como se debe realizar la composición.

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "{[T]_{B_1B_2}}"] \arrow[rr, bend right, "{[F\circ T]_{B_1B_3}}"'] & B_2 \arrow[r, "{[F]_{B_2B_3}}"] & B_3 \end{tikzcd}$$

Recordemos que una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es invertible o tiene inversa si existe otra transformación lineal T^{-1}”$W \rightarrow V$ tal que $T\circ T^{-1} + \mathrm{Id}_W$ y $T^{-1}\circ T = \mathrm{Id}_V$. Recrodemos tambien que T es invertible sii T es biyectiva, es decir, T es un isomorfismo.

Corolario 1.1 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal invertible, con V un espacio verticrial de dimensión finita. Sea B una base ordenada de V. Entonces

$$\left[T^{-1}\right]_B = [T]_B^{-1}\,.$$

Ejemplo 1.1

Consideremos dos transformaciones lineales $T,F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Consideremos la base $B=\{(-1,1),(1,2)\}$. Supongamos que

$$[T]_B=\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

y

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}.$$

1. Determinar las matrices $[T+F]$ y $[T+F]_B$.
2. Determinar la composición $T\circ F$ y hallar las matrices $[T\circ F]$ y $[T\circ F]_B$.

Solución

1. Como $[T+F]=[T]+[F]$ debemos primero hallar las matrices $[T]$y $[F]$. Es fácil encontrar la matriz estandar para F pues conocemos la expresión analítica de F. Entonces

$$F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{ y } F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Luego

$$[F]=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

La matriz $[T]$ la podemos hallar utilizando la identidad 1.3. Es decir,

$$[T]\,M_B=M_B\,[T]_B\,.$$

o lo que equivalente a

$$[T]=M_B\,[T]_B\,.M_B^{-1}.$$

Como $M_B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$, y su inversa es $M_B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$,entonces

$$[T]=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{7}{3}&\frac{8}{3}\end{pmatrix}.$$

Ahora podemos hallar $[T+F]$

$$[T+F]=[T]+[F]=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{7}{3}&\frac{8}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{4}{3}&\frac{11}{3}\end{pmatrix}.$$

Para hallar $[T+F]_B$ debemos tener las matrices $[T]_B$y $[F]_B$. Como tenemos la matriz $[F]$ podemos hallar la matriz $[F]_B$ por medio de la identidad 1.3. Entonces de

$$[F]\,M_B=M_B\,[F]_B\,,$$

tenemos

$$\begin{aligned}[F]_B&=M_B^{-1}\,[F]\,M_B\\&=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[T+F]_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

2. Ahora debemos hallar las matrices $[T \circ F]$ y $[T \circ F]_B$. Entonces

$$[T \circ F] = [T]\,[F] = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

y

$$[T \circ F]_B = [T]_B\,[F]_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2

Consideremos las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$f(1,2,1) = (1,1)\,,\ f(0,-1,1) = (1,-2)\,,\ f(1,0,1) = (2,3)$$

y

$$g(1,1) = (0,1,2)\,,\ g(1,-2) = (1,1,-1)\,.$$

Determinar la matriz estandar de la transformación $g \circ f$ y calcular el valor de $(g \circ f)(2,-5)$.

Solución

Como debemos calcular $[g \circ f]$ entonces hallaremos las matrices estandar de f y g. Primero observemos que $B_1 = \{v_1 = (1,0,0)\,, v_2 = (0,-1,1)\,, v_3 = (1,-1,1)\}$ y $B_2 = \{u_1 = (1,1)\,, u_2 = (1,-2)\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Por lo tanto existen las transformaciones lineales f y g.

De acuerdo a los datos que nos dan, la matriz de la transformación f en las bases B_1 y la base canónica E es

$$\begin{aligned} [f]_{B_1E} &= \left([f(v_1)]_E\ [f(v_2)]_E\ [f(v_3)]_E\right) \\ &= \left(f(v_1)\ f(v_2)\ f(v_3)\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora debemos hallar la matriz $[f]$. Para ello aplicamos el Teorema 1.6. Consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "{[f]_{B_1E}}"] & E \arrow[d, "P_{EE}=I"] \\ E \arrow[u, "{P_{EB_1}=\left(P_{B_1E}\right)^{-1}=M_{B_1}^{-1}}"] \arrow[r, "{[f]}"'] & E \end{tikzcd}$$

De acuerdo al diagrama la matriz $[f]$ se halla por medio de el siguiente producto de matrices

$$\begin{aligned} [f] &= I \circ [f]_{B_1E} \circ M_B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para encontrar la matriz $[g]$ debemos hacer un razonamiento similar. Como dato tenemos la matriz

$$[g]_{B_2E} = (g(u_1)\, g(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos hacer el siguiente diagrama que nos ayuda a determinar la matriz $[g]$

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "{[g]_{B_2E}}"] & E \arrow[d, "P_{EE}=I"] \\ E \arrow[u, "P_{EB_2}=\left(P_{B_2E}\right)^{-1}=M_{B_2}^{-1}"] \arrow[r, "{[g]}"'] & E \end{tikzcd}$$

Entonces

$$\begin{aligned} [g] &= I\,[g]_{B_2E}\,M_{B_2}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[g]\,[f] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 9 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} (g\circ f)(2,1,-5) &= [g\circ f]\,[(2,1,-5)] \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 9 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{3} \\ 3 \\ 29 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.7. Composición de transformaciones lineales

Como las transformaciones lineales son una caso particular de funciones entre espacios vectoriales, entonces podemos definir la composición de transformaciones lineales de la misma forma que en funciones.

Definición 1.1

Sean $T : V \to W$ y $F : W \to S$ dos transformaciones lineales. La composición de F con T es la función

$$F\circ T : V \to S$$

definida por

$$(F\circ T)(v) = F(T(v))$$

,
para cada $v \in V$.

Notemos que para que la función $F\circ T$ tenga sentido debe el rango de T debe estar contenido en el dominio de F.

Lema 1.1 Sean $T: V \to W$ y $F: W \to S$ dos transformaciones lineales. Entonces composición $F \circ T: V \to S$ es una transformación lineal. Además, la matriz estandar de $F \circ T$ es el producto de las matrices $[F]$ y $[T]$,es decir:

$$[F \circ T] = [F]\,[T]\,.$$

En la próxima sección vamos a generalizar el anterior resultado, pero por ahora presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3

Consideremos las transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+z)$$

y

$$F(x,y) = (x+2y, y, -x)\,.$$

Calcular la composición $F \circ T$ y la matriz estandar asociada a la composición.

Solución

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned}(F \circ T)(x,y) &= F\left(T\left(x,y,z\right)\right) = F\left((x+y, x+z)\right) \\ &= \left((x+y) + 2\left(x+z\right), x+z, -\left(x+y\right)\right) \\ &= (3x+y+2z, x+z, -x-y)\,.\end{aligned}$$

Determinamos cada una de las matrices estandar.

$$\begin{aligned}T\left(x,y,z\right) = (x+y, x+z) &= x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Entonces

$$[T] = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Similarmente

$$\begin{aligned}F(x,y) &= (x+2y, y, -x) \\ &= x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Luego

$$[F] = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Para la composición tenemos

$$\begin{aligned}(F \circ T)(x,y) &= (3x+y+2z, x+z, -x-y) \\ &= x\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Luego

$$[F \circ T] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$[F]\,[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = [F \circ T]\,.$$

1.8. EJERCICIOS

Ejercicio 1.1. Determinar cuales de las siguientes funciones son transformaciones lineales

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=(y,x)$.
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(x,y,0)+(1,0,0)$.
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=xy$.
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(2x-y,x)$.

Ejercicio 1.2. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $f(1,2,1)=(1,2)$ y $f(2,1,1)=(3,0)$. Hallar $f(2(2,1,1))$, $f(3,6,3)$ y $f(1,-1,0)$.

Ejercicio 1.3. Mostrar que las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales, verificando las propiedades y hallando luego la matriz estandar de cada transformación lineal.

1. $T(x,y,z)=(x+y,x-y)$.
2. $T(x,y)=(x,2x+y,x+3y)$.
3. $T(x,y,z)=(x-y+z,x+2y-3z)$.

Ejercicio 1.4. Para cada transformación lineal, hallar las imágenes y preimágenes de los indicadas en cada apartado.

1. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(x-2y+z,y+z)$. Hallar $T(S)$ y $T^{-1}(H)$, donde $S=\langle(1,-3,2)\rangle$ y $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2x-y=0\right\}$.
2. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, con $A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$. Hallar $T_A\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $T_A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $T_A^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$, $T(S)$, $T^{-1}(H)$, donde
$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+3y=0\right\}$$
y
$$H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)=\lambda(2,-3)\right\}.$$
.
3. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ donde $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\\-2&2\end{pmatrix}$. Hallar $T_A(2,4)$,y $T_A^{-1}(-1,2,2)$.

   Explicar por qué el vector $(1,1,1)$ no tiene preimagen bajo esta transformación.
4. Sea $t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por
$$t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$
Determinar $t(S)$ y una base, donde $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(1,2,3)\right\}$. Hallar $t^{-1}(H)$ y $t^{-1}(D)$, donde $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(1,2,-1)+\beta(0,-1,-1)\right\}$ y $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(0,-1,-1)\right\}$.

Ejercicio 1.5. Analice la existencia y unicidad de una transformación lineal T que cumpla las condiciones indicadas. En los casos posibles determine la expresión analítica de la transformación y la matriz estandar.

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(v_1)=(1,-3)$ y $T(v_2)=(1,5)$, para

a) $v_1 = (-1,2)$ y $v_2 = (0,-1)$.
b) $v_1 = (1,-3)$ y $v_2 = (-2,6)$.

2. $T(1,1,1) = (1,0,0)$, $T(0,-1,1) = (-1,2,1)$ y $T(1,0,1) = (1,1,0)$. Determinar $T(0,3,-1)$ y $T(2,-1,0)$.

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v_1) = (1,1,1)$, $T(v_2) = (0,-1,3)$ y $T(v_3) = (2,5,-7)$, para

   a) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (2,-1,2)$.
   b) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (1,0,1)$.
   c) $v_1 = (1,0,3)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,0,0)$.

Ejercicio 1.6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T_A(v) = A\,v.$$

En cada ítem siguiente, determinar la matriz A cumpliendo las condiciones indicadas. Obtener la expresión general de T_A en cada caso.

1. $A\,v$ es el vector cuyas componentes son la suma y la resta de las componentes de v.

2. $A\,v$ es el vector obtenido al proyectar v sobre la recta $y = x$.

3. $A\,v$ es el vector obtenido al proyectar v sobre la recta $x - 2y = 0$.

Ejercicio 1.7. Determinar la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones entre los espacios indicados utilizando la definición general y aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad de las Transformaciones Lineales. Indicar la matriz estandar.

1. De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

   a) Reflexión respecto a la recta $y = -2x$.
   b) Rotación en un ángulo $-\frac{\pi}{3}$.
   c) Proyección sobre la recta $y = -x$.

2. De $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$:

   a) Reflexión respecto del plano $x = y$.
   b) Reflexión respecto del plano $y + z = 0$.

Ejercicio 1.8. Dado el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}.$$

1. Determinar la transformación proyección $p_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de las siguientes maneras:

   a) Hallando una base ortogonal de S y aplicando el Teorema **??**.
   b) Determinando una ortogonal del espacio $S^\perp$, el Teorema **??** y luego aplicar la identidad $v = \mathrm{proy}_S v + \mathrm{proy}_{S^\perp} v$ para hallar la expresión analítica de $p_S = \mathrm{proy}_S$.
   c) Utilizar la matriz de proyección asociada al subespacio S.

2. Hallar la transformación de reflexión o simetría $r_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto al subespacio S de dos formas distintas.

Ejercicio 1.9. Consideremos una función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (0,0,2,1) \\ T(k,0,1) &= (1,0,0,0) \\ T(-2,k,-1) &= (0,-2,0,0) \end{aligned}$$

1. Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que T defina una única transformación lineal (para cada k).

2. Para el caso particular de $k = -1$ hallar la expresión analítica y la matriz estandar de T.

Núcleo e Imagen de una transformación lineal. Inyectividad y sobreyectividad

Ejercicio 1.10. En los casos siguientes, para la transformación lineal f, encontrar bases y sistemas de ecuaciones de los subespacios Nuc$f$ e Img$f$, Nuc$f^{\perp}$ e Img$f^{\perp}$. Comprobar el Teorema de la dimensión. Determinar que transformaciones son inyectivas, sobreyectivas y cuales son isomorfismos.

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada por
$$T(1,0,0,0) = T(0,0,1,0) = (1,0)$$
$$T(0,1,0,0) = (0,0,0,1) = (0,1).$$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(1,1) = (0,1)$ y $f(1,-1) = (2,1)$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz estandar es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz estandar es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz estandar es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determinar, cuando sea posible, $f^{-1}(1,-2,3)$ y $f^{-1}(1,2,3)$.
7. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z,t) = (x+y, y+z, z+t)$
8. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por: $f(x,y,z,t) = (x-y, y-z, z-t, t-x)$.
9. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la proyección de un vector u sobre el vector $v = (2,-1,1)$.

Ejercicio 1.11. Determinar la transformación de proyección $\mathrm{proy}_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y la transformación de reflexión $\mathrm{r}_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ asociada a cada subespacio definida por $\mathrm{ref}_S(v) = \mathrm{proy}_S v - \mathrm{proy}_{S^{\perp}} v$ en la dirección de subespacio S.

¿Se puede afirmar que Notemos que $\mathrm{ref}_S(v) = 2\mathrm{proy}_S(v) - v$?
Hallar Imgproy$_S$, Imgref$_S$, Nucproy$_S$, y Nucref$_S$. Determinar la matriz estandar de proy$_S$ y ref$_S$.

1. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,2,-1)\right\}$
2. $S = \{(x,y,z) : x+y+z = 0\}$.

Ejercicio 1.12. Dadas las transformaciones lineales definidas por las condiciones indicadas, determinar la expresión analítica de cada una y su matriz estandar.

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y Nuc$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\right\}$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que Nuc$f = S$ e Img$f = W$, donde $S = \begin{cases} x+y-z & = 0 \\ 2x+z & = 0 \end{cases}$ y $W = \langle (2,-1,0), (0,1,-2) \rangle$
3. $T(L) \subseteq S$, siendo $L = \langle (2,1,2) \rangle$ y $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\right\}$.
4. $T(S) = D$, siendo $S = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$ y $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\right\}$.
5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que Img$f = \langle (1,0,1) \rangle$ y Nuc$f = \langle (2,1,2), (1,0,1) \rangle$.

6. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nuc}T=S$ y $\mathrm{Img}T=S^{\perp}$ siendo $S=\langle(1,-1,1),(-1,0,-1),(0,1,0)\rangle$.
7. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nuc}f=\{(x,y,z):x=y=2z\}$. Probar que la imagen de f es un plano que pasa por el origen.
8. Sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nuc}f=S^{\perp}$ y $f(v)=2v$, para cada $v\in S$, donde $S=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:x+2y=0 \text{ y } w=0\right\}$.

Ejercicio 1.13. Dada la transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida como $f(\vec{x})=A\vec{x}$,donde

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&k\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

1. Determinar si existen valores $k\in\mathbb{R}$ tales que T sea un monomorfismo. Para los valores encontrados de k, determinar el núcleo y la imagen de f.
2. Para el caso $k=1$, hallar el núcleo y la imagen de f, y una base para cada uno de estos subespacios.

Ejercicio 1.14. Sea la tranformación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz estandar es

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\-3&k&1&0\\-1&2&0&0\end{pmatrix}.$$

Determinar, si existen , los valores de $k\in\mathbb{R}$, tal que:

1. $\mathrm{rg}(A)=2$.
2. f sea un monomorfismo.

Ejercicio 1.15. Estudiar si las siguiente transformaciones admiten inversa. En los casos posibles encuentre la expresión analítica de la transformación inversa.

1. $f(x,y)=(x+2y,-x+y)$
2. $f(x,y,z)=(x-z,2y,x+2z)$
3. $f(x,y,z)=(3x+4y+z,2x+5y+3z,x+2y+z)$

Matriz de transformación

Ejercicio 1.16. Dada la transformación lineal $t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz estandar es

$$[t]=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz $[t]_B$, donde

1. $B=\{(1,2,1),(3,1,2),(2,1,2)\}$.
2. $B=\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3\}$.
3. Hallar $t(0,2,3)$ en ambas matrices.
4. Hallar la expresión analítica.

Ejercicio 1.17. Consideremos una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. Determinar la forma analítica de T, y la matriz de T con respecto a la base $B=\{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$.

Ejercicio 1.18. Determine en cada caso la matriz de la transformación T indicada

1. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y)=(2x-y,y-x)$ y consideremos la base $B=\{(1,-1),(0,1)\}$.
   a) Hallar $[T]_{EB}$.
   b) Hallar $[T]_B$.
   c) Determinar $T(2,3)$ en forma directa y utilizando las matrices de transformación de los ítems anteriores.

2. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definida por

$$T(x,y,z)=(x+y+z,x-y+2z,3y-z),$$

   y consideremos la base $B=\{(1,1,0),(1,-1,1),(2,1,0)\}$.
   a) Hallar las matrices $[T]_{BE}$, $[T]_B$ y $[T]_{EB}$.
   b) Determinar $T(1,2,-1)$ en forma directa y utilizando la matriz de transformacion $[T]_{BE}$.

Ejercicio 1.19. Dadas las bases

$$B=\{(1,-1),(2,1)\} \text{ y } B'=\{(1,1),(0,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$, y

$$[T]_B=\begin{pmatrix} -1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

la matriz de la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ en la base B, hallar la matriz de T con respecto a B'. Además, hallar $[v]_B$, $[T(v)]_B$ y $[T(v)]_{B'}$ para el vector v cuya matriz de coordenadas es $[v]_{B'}=(-3,1)^t$.

Ejercicio 1.20. Dada la transformación $T(x,y)=(x+y,2y+3x)$, y las bases $B_1=\{(-1,1),(0,1)\}$ y $B_2=\{(-2,1),(1,1)\}$.

1. Determinar la matriz estandar.
2. Determinar la matriz de transformación $[T]_{B_1B_2}$.
3. Calcular la imagen del vector $v=(-1,1)$ primero utilizando directamente la transformación y después utilizando la matriz $[T]_{B_1B_2}$.
4. Hallar $[v]_{B_1}$, $[T(v)]_{B_1}$ y $[T(v)]_{B_2}$ para el vector v cuya matriz de coordenadas en la base B_2 es $[v]_{B_2}=(-1,2)^t$.

Ejercicio 1.21. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la transformación cuya matriz en las bases $B_1=\{(1,1,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$ y $B_2=\{(1,1,-1),(2,-1,0),(1,0,0)\}$ es

$$[T]_{B_1B_2}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}.$$

Determinar $a\in\mathbb{R}$ tal que $T(1,2,3)=(4,2,1)$. Para el valor de a encontrado el núcleo, y la imagen.

Ejercicio 1.22. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal. ¿Es posible hallar la matriz estandar de T (la matriz respecto a las bases canónicas) sabiendo que

$$\begin{aligned} T(1,1,-1)&=e_1+e_3\\ T(0,-1,1)&=e_1+e_2-e_3\\ T(2,1,2)&=-e_1+e_2-2e_3\end{aligned}$$

donde $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ es la base canónica?

Ejercicio 1.23. Consideremos las bases $B_1 = \{(-1,1),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(-2,1),(1,1)\}$ y la matriz

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

de una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en la base B_1 .

1. Determinar la matrices cambio de base $P_{B_1B_2}$ y $P_{B_2B_1}$.

2. Hallar $[v]_{B_1}$ y $[T(v)]_{B_2}$, donde $[v]_{B_2} = (-1,2)^t$.

3. Determine la matriz estandar, es decir, la matriz de T respecto a la base canónica. Halle la expresión analítica de T.

Ejercicio 1.24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f(x,y) = (x-y, 0, 2y-x)$ y consideremos la base $B_2 = \{(0,1,0),(1,1,0),(0,0,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determinar una base B_1 de $\mathbb{R}^2$ tal que $[f]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.25. Consideremos la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en las bases $E = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,0,0),(1,1,1),(0,0,1)\}$ es

$$[T]_{EB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar la expresión analítica de T y hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (2,1,0)$.

Ejercicio 1.26. Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base y sea

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar si la transformación es un monomorfismo.

2. Si $w = 2v_1 + 3v_2 - v_3$, hallar $[T(w)]_B$.

3. Si $B = \{(1,1,0),(1,2,0),(2,0,0)\}$ y E es la base canónica, determinar $[T]_{BE}$.

Ejercicio 1.27. Consideremos una transformación lineal $t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que su matriz estandar es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & a & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Estudiar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\operatorname{rg} A = 2$

2. T inyectiva

Ejercicio 1.28. Dado el subespacio $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$, determinar una base B de $\mathbb{R}^3$ que sea la unión de una base de S con una base de $S^\perp$, y aplicar el Teorema 1.3 para encontrar la transformación de la proyección y la reflexión respecto del plano S. Hallar la matriz $[\text{proy}_S]_B$ de la transformación en la base encontrada y luego la matriz estandar. Determinar la expresión analítica de la transformación. Comparar el resultado con el resultado del Ejercicio 1.8

Composición de transformaciones

Ejercicio 1.29. Dadas las transformaciones $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$T(x,y,z) = (x-y, x+z)$$

y

$$G(x,y) = (x, y, x-y).$$

Determinar las expresiones analíticas de $T \circ G$ y $G \circ T$. Determine las matrices estandar asociadas y verifique usando las operaciones entre matrices.

Ejercicio 1.30. Consideremos dos transformaciones lineales $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que sus matrices en las bases $B_1 = \{(3,7),(1,2)\}$ y $B_2 = \{(6,7),(5,6)\}$ son

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } [S]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Hallar la matriz de la transformación $S \circ T$ en la base canónica.

Ejercicio 1.31. Consideremos las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyas matrices estandar son $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ y $[H] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente. Determinar $\text{Nuc}(T \circ H)$, $\text{Img}(T \circ H)$ y $\text{Nuc}(T \circ H^{-1})$.

Ejercicio 1.32. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz estandar es

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar una transformación lineal $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nuc}G \neq \mathbb{R}^4$, y $(T \circ G)(v) = (G \circ T)(v) = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 1.33. Consideremos el subespacio

$$S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-2z+w = 0,\, 2x+y-z+4w = 0\right\}$$

y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x,y,z) = (x+y-z, -y+2z, x+z, 2x+y).$$

Estudiar si posible definir una transformación lineal $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cumpliendo las condiciones $\text{Img}G = S$ y $(T \circ G)(v) = \vec{0}$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$.