Índice general

1 ORTOGONALIZACIÓN

1.1. Bases ortogonales y ortonormales

Recordemos que un par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $u \cdot v = \vec{0}$. Ahora veremos una generalización de la noción de vectores ortogonales a conjunto de vectores.

Definición 1.1

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

- Diremos que B es un conjunto *ortogonal* si cada par de vectores diferentes del conjunto es ortogonal, es decir, $v_i \cdot v_j = 0$,para cada $i \neq j$.
- Diremos que B es un conjunto *ortonormal*, si es ortogonal y además cada vector tiene norma 1, es decir $\|v_i\| = 1$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Siempre que tenemos un conjunto ortogonal podremos fabricarnos un conjunto ortonormal. Lo único que debemos hacer es dividir cada vector del conjunto por su módulo. Como veremos más adelante, que un espacio vectorial de dimensión finita tenga una base ortogonal es muy útil.

Ejemplo 1.1

La base estandar $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es claramente ortonormal, pues para cada $i \neq j$, $e_i \cdot e_j = 0$ y $\|e_i\| = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo 1.2

El conjunto $\{v_1 = (2,1,-1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,-1,1)\}$ es ortogonal, pues

$$\begin{array}{rcl} (2,1,-1)\cdot(0,1,1) & = & 0+1-1=0 \\ (2,1,-1)\cdot(1,-1,1) & = & 2-1-1=0 \\ (0,1,1)\cdot(1,-1,1) & = & 0-1+1=0 \end{array}$$

Notemos que estos vectores no son de norma 1, por lo tanto no son ortonormales. Si consideramos el vector normalizado de cada uno, es decir,

$$\vec{v}'_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \vec{v}'_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \text{ y } \vec{v}'_2 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|},$$

entonces el conjunto $\{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3\}$ es ortonormal.

Ahora veremos algunas propiedades muy importantes de los conjuntos de vectores ortogonales. La primer propiedad afima que todo conjunto ortogonal de vectores es linealmente independiente.

Teorema 1.1

Todo conjunto de vectores ortogonales $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.
Por lo tanto, todo conjunto de n vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonales es una base de $\mathbb{R}^n$.

N

No todo conjunto linealmente independiente es ortogonal. Por ejemplo, el conjunto $\{(1,1,1),(1,0,1)\}$ es linealmente independiente y, obviamente, no es ortogonal.

Definición 1.1

Una *base ortogonal* de un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ es una base de S formada por vectores ortogonales.
Ua base del subespacio S es *ortonormal* si es ortogonal y los vectores son unitarios (de norma 1).

Un de las ventajas de tener una base ortogonal es que las coordenadas de los vectores respecto a dicha base ortogonal son sencillas de hallar, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.2

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base ortogonal del subespacio S de $\mathbb{R}^n$. Entonces las coordenadas de $w \in S$ en la base B están dadas por

$$c_i = \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Es decir, para cada vector $w \in S$

$$w = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \cdots + \frac{w \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k.$$

Si B es un conjunto *ortonormal*, entonces las coordenadas de w en la base B están dadas por

$$c_i = w \cdot v_i, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Es decir, para cada vector $w \in S$

$$w = (w \cdot v_1)\, v_1 + (w \cdot v_2)\, v_2 + \cdots + (w \cdot v_k)\, v_k.$$

Ejemplo 1.1

Determinar si el conjunto

$$B = \{(2,1,-1),(0,1,1),(1,-1,1)\}$$

es una base. Hallar una base ortonormal y las coordenadas de $w = (2,-1,3)$ en dicha base.

Solución

Como vimos anteriormente, el conjunto de vectores $\{(2,1,-1),(0,1,1),(1,-1,1)\}$ es ortogonal. Por lo tanto es linealmente independiente y como son tres vectores, forman una base de $\mathbb{R}^3$.
Escribamos al vector $w = (2,-1,3)$ como combinación lineal de los vectores de la base. De acuerdo al Teorema 1.1 podemos escribir:

$$\begin{aligned} w = & \frac{(2,-1,3)\cdot(2,1,-1)}{\|(2,1,-1)\|^2}(2,1,-1) + \frac{(2,-1,3)\cdot(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|^2}(0,1,1) \\ & + \frac{(2,-1,3)\cdot(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1) = 0\,(2,1,-1) + \frac{2}{2}(0,1,1) + 2\,(1,-1,1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas de $w=(2,-1,3)$ en la base B son

$$[w]_B=(0,1,2)^t.$$

Podemos hallar una base ortonormal calculando el módulo de cada vector v_i y considerando el vector normalizado $w_i=\frac{v_i}{\|v_i\|}$. En este caso

$$\begin{array}{lllll} w_1 & = & \frac{(2,1,-1)}{\|(2,1,-1)\|} & = & \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) \\ w_2 & = & \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|} & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \\ w_3 & = & \frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|} & = & \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \end{array}$$

En el siguiente ejemplo vamos a determinar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ a partir del conocimiento de un par de vectores ortogonales.

Ejemplo 1.2

Consideremos los vectores ortogonales $v_1=\left(1,\frac{1}{2},-2\right)$ y $v_2=(3,-2,1)$. Determinar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Tenemos dos vectores ortogonales. Para determinar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ debemos encontrar un tercer vector v_3 tal que $v_1\cdot v_3=0$ y $v_2\cdot v_3=0$, es decir, que sea ortogonal a v_1 y v_2. Recordemos que el producto vectorial de dos vectores produce un tercer vector perpendicular a los vectores. Entonces haciendo $v_3=v_1\times v_2$ obtenemos un vector ortogonal a v_1 y a v_2. Calculamos el producto vectorial

$$\begin{aligned} v_3=v_1\times v_2 &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\check{i}-6\check{j}-2\check{k}-\frac{3}{2}\check{k}-4\check{i}-\check{j} \\ &= \left(-\frac{7}{2},-7,-\frac{7}{2}\right). \end{aligned}$$

Entonces

$$\left\{\left(1,\frac{1}{2},-2\right),(1,-1,1),\left(-\frac{7}{2},-7,-\frac{7}{2}\right)\right\}$$

es un conjunto ortogonal y por lo tanto es una base de $\mathbb{R}^3$.

La otra forma es plantear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma. Supongamos que $v_3=(x,y,z)$, entonces

$$v_3\cdot\left(1,\frac{1}{2},-2\right)=0,\text{ es decir } x+\frac{1}{2}y-2z=0.$$

$$v_3\cdot(1,-1,1)=0,\text{ es decir } x-y+z=0.$$

De la última ecuación $x=y-z$. Sustituímos en la primera, $y-z+\frac{1}{2}y-2z=\frac{3}{2}y-3z=0$. Luego, $y=2z$ y por lo tanto $x=z$. Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} x&=z \\ y&=2z \\ z&=z \end{aligned}$$

Entonces

$$(x,y,z)=t(1,2,1)$$

son los vectores ortogonales a los vectores $\left(1,\frac{1}{2},-2\right)$ y $(1,-1,1)$. Damos el valor $t=-\frac{7}{2}$ y obtenemos el mismo vector $v_3=\left(-\frac{7}{2},-7,-\frac{7}{2}\right)$ hallado anteriormente.

Ahora presentamos un ejemplo donde nos piden hallar una base ortogonal de un subespacio y las coordenadas de un vector del subespacio en la base ortogonal.

Ejemplo 1.3

Encontrar una base ortogonal para el subespacio S de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}.$$

Hallar las coordenadas del vector $w = (-3,2,1) \in S$ en la base ortogonal hallada.

Solución

Más adelante veremos un método para determinar una base ortonormal de S. Ahora lo haremos planteando un sistema. Primero buscamos una base de S. Como $x = -2y + z$, entonces

$$(x,y,z) = (-2y+z,y,z) = y(-2,1,0) + z(1,0,1).$$

Luego el subespacio es de la forma

$$S = \{(x,y,z) = t(-2,1,0) + k(1,0,1)\} = \langle(-2,1,0),(1,0,1)\rangle.$$

Los vectores $(-2,1,0),(1,0,1)$ constituyen una base de S pero no son ortogonales. Para encontrar una base ortogonal es suficiente encontrar otro vector de S que se ortogonal a cualquiera de ellos. Sea (x,y,z) dicho vector. Entonces se debe verificar

$$x + 2y - z = 0 \text{ y } (x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, $x = -z$ y $-z + 2y - z = 0$. Entonces de $-2z + 2y = 0$ obtenemos $y = z$. Por lo tanto cualquier vector no nulo de la forma

$$v = (-z,z,z) = z(-1,1,1)$$

servirá para formar una base ortogonal, pues los dos vectores satisfacen la ecuación que define al subespacio S y además $(-1,1,1)\cdot(1,0,1) = -1+0+1 = 0$. Entonces $B = \{(1,0,1),(-1,1,1)\}$ es una base ortogonal de S.

Ahora debemos hallar las coordendas de w en la base B. Tengamos cuidaddo de comprobar que el vector w pertenece a S. En caso contrario no tiene sentido la pregunta. Como B es ortogonal, entonces por el Teorema 1.1,

$$(-3,2,1) = c_1(1,0,1) + c_2(-1,1,1)$$

donde

$$c_1 = \frac{(1,0,1)\cdot(-3,2,1)}{\|(1,0,1)\|^2} = \frac{-3+0+1}{2} = -\frac{3}{2}$$

y

$$c_2 = \frac{(-1,1,1)\cdot(-3,2,1)}{\|(-1,1,1)\|^2} = \frac{3+2+1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Por lo tanto

$$[(-3,2,1)]_B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Proyecciones ortogonales

En esta sección estudiaremos la noción de proyección ortogonal de un punto sobre una recta y sobre un plano. También estudiaremos la noción de proyección ortogonal de un vector sobre otro vector y con esto podremos estudiar las proyecciones ortogonales de un vector sobre un plano y de una recta sobre un plano.

1.2.1. Proyección de un vector sobre otro

Ahora estamos interesados en estudiar el siguiente problema. Dados dos vectores u y v, no nulos, queremos conocer si es posible descomponer al vector u como suma de un vector paralelo al vector v y otro ortogonal al vector v. Es decir, queremos descomponer al vector u en la siguiente forma:

$$u = u_1 + u_2 \quad u_1 \| v \;\; u_2 \perp v.$$

Como $u_1 \| v$,, entonces debe existir un $k \in \mathbb{R}$tal que

$$u_1 = k v.$$

Ahora multiplicamos (producto escalar) la igualdad $u = u_1 + u_2$ por el vector v y obtenemos

$$u \cdot v = (u_1 + u_2) \cdot v = (kv + u_2) v = k v \cdot v + \underbrace{u_2 \cdot v}_{=0} = k v \cdot v.$$

Luego

$$k = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}.$$

Reemplzamos el k encontrado e la expresión de u_1

$$u_1 = kv = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v.$$

Por lo tanto

$$u_1 = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v.$$

Este vector se llama la proyección del vector u en la dirección del vector v y lo denotamos como

$$\boxed{\operatorname{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v.}$$

El vector u_2 que es ortogonal a v se obtiene como

$$u_2 = u - u_1.$$

En general, el vector u_2 se simboliza como

.

$$\operatorname{perp}_v u = u - \operatorname{proy}_v u.$$

N Si el ángulo entre los vectores u y v es mayor a 90°, como indica la figura, entonces la proyección $\operatorname{proy}_v u$ estará en la dirección opuesta al vector v.

De todos los posibles múltiplos escalares del vector v, es decir, de todos los posibles vectores de la forma kv,con $k \in \mathbb{R}$, la proyección ortogonal de u en la dirección de v es la más cercana al vector u.

Ejemplo 1.4

Determinar la proyección del vector $u = (3,2)$ en la dirección del vector $v = (1,3)$.

Solución
De acuerdo a la fórmula $\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$ tenemos que

$$\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{(3,2) \cdot (1,3)}{10}(1,3) = \frac{9}{10}(1,3) = \left(\frac{9}{10}, \frac{27}{10}\right).$$

Una aplicación: Distancia de un punto a una recta

Ahora aplicaremos la noción de proyección para calcular la distancia de un punto a una recta.

Supongamos que queremos calcular la distancia de un punto P a una recta L (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$). El problema se puede reducir a determinar la istancia entre el punto P y el punto A de la recta tal que el vector $\overrightarrow{PA}$ sea ortogonal la recta L (o al vector director de L). Se elegimos otro punto, llamado B, de la recta L y formamos el vector $u = \overrightarrow{BP}$, entonces podemos calcular la proyección del vector $u = \overrightarrow{BP}$ sobre el vector $v = \overrightarrow{BA}$,es decir, podemos calcular $\text{proy}_v u$. El módulo del vector perpendicular $\overrightarrow{PA}$ es la distancia buscada, donde

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BP} - \text{proy}_v u.$$

Sino queremos recurrir a la noción de proyección de un vector sobre otro para calcular la distancia de un punto a una recta, podemos también calcularlo de la siguiente forma

Supongamos que tenemos un punto P y queremos calcular la distancia a la recta L, supondremos que está en $\mathbb{R}^3$, y que tiene a v como vector director. Consideremos el punto $A \in L$ de tal forma que la recta que pasa por A y P sea perpendicular a L. La distancia buscada es $d = d(P,L) = \left\|\overrightarrow{PA}\right\|$.

Consideremos otro punto B sobre L. Entonces el vector $\overrightarrow{BA}$ es paraleo al vector director v de L. Consideremos el paralelogramo determinado por lo vectores v y $\overrightarrow{BP}$. El segmento d es la altura del paralelogramo. Sabemos que el área de dicho paralelograma se determina por medio del producto vectoril de los vectores v y $\overrightarrow{BP}$

$$\text{área} = \text{base} \times \text{altura} = \|v\| \, d = \left\|\overrightarrow{PA} \times v\right\|.$$

Entonces

$$d = \frac{\left\|\overrightarrow{PA} \times v\right\|}{\|v\|}.$$

Analizamos un ejemplo donde se apliquen los dos métodos.

Ejemplo 1.5

Hallar la distancia del punto $P = (1,2,1)$ a la recta L de ecuación

$$(x,y,z) = (1,1,-1) + \lambda(2,-1,2).$$

Solución
Lo primero que debemos hacer es comprobar si el punto pertenece a la recta. Para ello debemos sustituir las coordenadas del punto en la recta y comprobar que se cumple la igualdad. En este caso

$$(1,2,1) = (1,1,-1) + \lambda(2,-1,2).$$

De donde obtenemos $1 = 1 + 2\lambda$, $2 = -2\lambda$ y $1 = -1 + 2\lambda$. Entonces $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, lo que es imposible. Por lo tanto el punto no está sobre la recta.
Ahora determinamos la distancia aplicando la noción de proyección.

Consideramos el punto $B = (1,1,-1)$ de la recta y formamos el vector $u = \overrightarrow{PB} = (1,2,1)-(1,1,-1) = (0,1,2)$. Consideramos el vector $v = (2,-1,2)$ director de la recta. Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{proy}_v u &= \frac{u\cdot v}{v\cdot v}v = \frac{(0,1,2)\cdot(2,-1,2)}{9}(2,-1,2)\\ &= \frac{1}{3}(2,-1,2) = \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\overrightarrow{PA} = u - \operatorname{proy}_v u = (0,1,2) - \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right).$$

por lo tanto

$$d = \left\|\overrightarrow{PA}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+16+16} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ahora utilizaremos el otro método. Consideremos la fórmula

$$d = \frac{\left\|\overrightarrow{PB}\times v\right\|}{\|v\|}.$$

Entonces

$$\overrightarrow{PB}\times v = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix} = (4,4,,-2).$$

Entonces

$$d = \frac{\left\|\overrightarrow{PB}\times v\right\|}{\|v\|} = \frac{\|(4,4,,-2)\|}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

1.2.2. Proyeccion de un vector sobre un subespacio

Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que la *proyección* de u en la dirección del vector v es el vector $\operatorname{proy}_v u = \frac{u\cdot v}{v\cdot v}v$ y que es paralelo al vector v. Además, sabemos que el vector u se puede descomponer en la suma

$$u = \operatorname{proy}_v u + \operatorname{perp}_v u,$$

donde $\operatorname{proy}_v u$ es ortogonal al vector v. Si consideramos el subespacio generado por v, y su complemento ortogonal, es decir $\langle v\rangle$ y $\langle v\rangle^{\perp}$ entonces

$$\operatorname{proy}_v u \in \langle v\rangle \text{ y } \operatorname{perp}_v u \in \langle v\rangle^{\perp}.$$

Por lo tanto, hemos descompuesto el vector u en una suma de dos vectores, uno en $\langle v\rangle$ y el otro en el espacio ortogonal $\langle v\rangle^{\perp}$.

Ahora vamos a generalizar esta idea considerando la proyección de un vector en la dirección de un subespacio cualquiera.

Recordemos que por el Teorema de Descomposición **??**, dado un subespacio S de $\mathbb{R}^n$, podemos descomponer al espacio como

$$\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}.$$

En consecuencia todo vector $u\in\mathbb{R}^n$ se descompone, en forma única, como la suma de un vector de S y un vector de $S^{\perp}$. Es decir, existen vectores v_1, v_2 tales que

$$u = v_1 + v_2,\ v_1 \in S \text{ y } v_2 \in S^{\perp}.$$

El vector v_1 se llama la ***proyección*** de v sobre el subespacio S y se simboliza por

$$v_1 = \operatorname{proy}_S u.$$

Entonces

$$v_2 = u - v_1 = u - \text{proy}_S u,$$

y por lo tanto $u - \text{proy}_S u$ es ortogonal al subespacio S.

Utilizando un razonamiento análogo, pero tomando ahora el subespacio $S^\perp$, tenemos que

$$v_2 = \text{proy}_{S^\perp} u.$$

Por lo tanto, el vector u se descompone como la suma de dos proyecciones, una en la dirección de S y otra en la dirección del complemento ortogonal $S^\perp$:

$$\boxed{u = \text{proy}_S u + \text{proy}_{S^\perp} u.}$$

N Consideremos un subespacio S de $\mathbb{R}^n$. Sea $u \in S$ y $v \in S^\perp$. Entonces

$$u = u + 0 \in S \oplus S^\perp, \text{ entonces } \text{proy}_S u = u,$$

y

$$v = 0 + v \in S \oplus S^\perp, \text{ entonces } \text{proy}_S v = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{proy}_S u &= u \text{ para todo } u \in S \\ \text{proy}_S v &= 0 \text{ para todo } v \in S^\perp. \end{aligned}$$

Otro forma para determinar una proyección de un vector sobre un subespacio conociendo una base ortogonal del subespacio.

Teorema 1.3

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base ortogonal de S. Entonces la proyección de un vector u sobre S es

$$\text{proy}_S u = \frac{v_1 \cdot u}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{v_2 \cdot u}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \cdots + \frac{v_k \cdot u}{v_k \cdot v_k} v_k. \tag{1.1}$$

El complemento ortogonal de u respecto de S es

$$\text{perp}_S u = u - \text{proy}_S u.$$

Notemos que cada sumando de la igualdad (1.1) es la proyección del vector u sobre cada v_i (o el subespacio generado por v_i). Luego podemos escribir la igualdad (1.1) como

$$\text{proy}_S u = \text{proy}_{v_1} u + \text{proy}_{v_2} u + \cdots + \text{proy}_{v_k} u,$$

donde $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base ortogonal de S.

Si la base B es es ortonormal, entonces la expresión anterior se puede simplificar

$$\boxed{\text{proy}_S v = (v \cdot v_1) v_1 + (v \cdot v_2) v_2 + \cdots + (v \cdot v_k) v_k.}$$

Vamos a dar un ejemplo de como determinar la proyección de un vector sobre un subespacio.

Ejemplo 1.1

Dado el subespacio
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0, x-y=0\},$$
determinar la proyección del vector $v = (1,0,-2)$ sobre S.

Solución

Vamos a analizar dos formas de encarar el problema.

1. En primer lugar vamos a hallar una base de S y una base de $S^\perp$ de tal forma que el vector v se pueda escribir como
$$v = \mathrm{proy}_S u + \mathrm{proy}_{S^\perp} u \in S \oplus S^\perp.$$
Entonces busquemos primero una base de S y después una base de $S^\perp$. Como $x+y-z=0$ y $x-y=0$, entonces $x=y$ y $2x=z$. Luego,
$$(x,y,z) = (x,x,2x) = x(1,1,2).$$
Por lo tanto
$$S = \langle (1,1,2) \rangle .$$
Ahora debemos hallar una base de $S^\perp$. Recordemos que (x,y,z) de $S^\perp$ si y sólo si (x,y,z) es ortogonal a cada uno de los vectores de la base de S. Entonces $(x,y,z) \in S^\perp$ si y sólo si
$$(x,y,z) \cdot (1,1,2) = 0,$$
es decir
$$x+y+2z=0.$$
Entonces
$$S^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+2z=0\}.$$
Si queremos hallar una base podemos hacer lo siguiente
$$(x,y,z) = (-y-2z, y, z) = y(-1,1,0) + z(-2,0,1).$$
Entonces
$$S^\perp = \langle (-2,0,1), (-1,1,0) \rangle$$
Como
$$\begin{aligned} v = (1,0,-2) \in S \oplus S^\perp &= \langle (1,1,2) \rangle \oplus \langle (-2,0,1), (-1,1,0) \rangle, \\ &= \langle (1,1,2), (-2,0,1), (-1,1,0) \rangle = \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$
entonces existen
$$v_1 \in \langle (1,1,2) \rangle \text{ y } v_2 \in \langle (-2,0,1), (-1,1,0) \rangle,$$
tales que $v = v_1 + v_2$. Encontremos dichos vectores.

Como v es combinación lineal de los vectores de la base $\{(1,1,2), (-2,0,1), (-1,1,0)\}$ entonces existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ tal que
$$(1,0,-2) = \underbrace{a(1,1,2)}_{\mathrm{proy}_S v} + \underbrace{b(-2,0,1) + c(-1,1,0)}_{\mathrm{proy}_{S^\perp} v}.$$
Luego, resolviendo el sistema obtenemos $a = -\frac{1}{2}$, $b=-1$ y $c = \frac{3}{2}$. Por lo tanto obtenemos
$$\mathrm{proy}_S v = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \text{ y } \mathrm{proy}_{S^\perp} v = \left(\frac{3}{2}, 1, -1\right).$$

Es claro que

$$(1,0,-2)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)+\left(\frac{3}{2},1,-1\right).$$

Otra forma. Como $v=\operatorname{proy}_S v+\operatorname{proy}_{S^\perp} v$, entonces llamando $\operatorname{proy}_S v=(x,y,z)$, tenemos que

$$(1,0,-2)=(x,y,z)+(1-x,-y,-2-z)\in S\oplus S^\perp.$$

Entonces (x,y,z) satisface las ecuaciones que definen a S, es decir,

$$x+y-z=0, x-y=0,$$

y $(1-x,-y,-2-z)$ satisface las ecuación que define a $S^\perp$, es decir

$$1-x+(-y)+2(-2-z)=1-x-y-4-2z=0,$$

Entonces nos queda un sistema

$$\begin{cases} x+y-z & =0\\ x-y & =0\\ -x-y-2z & =3\end{cases}$$

resolviendo, $x=y$, $2x-z=0$. Entonces $z=2x$. Entonces $-6x=3$, es decir, $x=-\frac{1}{2}=y$ y $z=-1$. Entonces

$$\operatorname{proy}_S v=(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{proy}_{S^\perp} v&=(1,0,-2)-\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)\\ &=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-1\right).\end{aligned}$$

2. Ahora vamos aplicar el método descripto en la Nota **??**. Como $S=\langle(1,1,2)\rangle$, entonces $u=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$ es un vector que genera a S y es unitario. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{proy}_S v=(u\cdot v)\,u&=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\cdot(1,0,-2)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\\ &=\frac{1}{6}(-3)(1,1,2)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right).\end{aligned}$$

Ahora, de la igualdad $v=\operatorname{proy}_S v+\operatorname{proy}_{S^\perp} v$, podemos hallar $\operatorname{proy}_{S^\perp} v$ pues

$$\begin{aligned}\operatorname{proy}_{S^\perp} v=v-\operatorname{proy}_S v&=(1,0,-2)-\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)\\ &=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right).\end{aligned}$$

Distancia de un vector a un subespacio

Recordemos que los vectores en $\mathbb{R}^n$ que estamos considerando son vectores que tienen origen en el origen de coordenadas. Entonces podemos identificar a un vector v con el punto final del vector del mismo.

La distancia de un punto P en $\mathbb{R}^n$ a un subespacio S se define como la distancia de P al punto más cercano en S. Si v_P es el vector con origen en $\vec{0}$ y extremo en P, es decir $v_P=P-\vec{0}$,entonces la distancia de P a S, o la distancia de v_P a S, se define como

$$d(P,S) = d(v_P, S) = \|v_P - \text{proy}_S v_P\|.$$

Recordando que el vector v_P se descompone en una componente $\text{proy}_S v_P$ y una componente $\text{proy}_{S^\perp} v_P$, es decir

$$v_P = \text{proy}_S v_P + \text{proy}_{S^\perp} v_P,$$

entonces

$$v_P - \text{proy}_S v_P = \text{proy}_{S^\perp} v_P.$$

Por lo tanto,

$$d(v_P, S) = \|\text{proy}_{S^\perp} v_P\|.$$

Es decir, la distancia del vector v_P al subespacio S es la norma de la la proyección ortogonal de v en la dirección de $S^\perp$. También se dice que $\text{proy}_{S^\perp} v_P$ es la componente ortogonal de v según S.

Ejemplo 1.2

Determinar la distancia del vector $v = (1,2,2)$ al subespacio $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\right\}$.

Solución

Vamos a resolver este ejercicio por dos métodos. Primero vamos a aplicar el Teorema 1.2.2. Para ello deberemos primero contar con una base ortogonal de S. Buscamos primero una base y después analizamos como encontrar una base ortogonal. Claramente, si $z = 2x + y$, entonces

$$(x,y,z) = (x,y,2x+y) = x(1,0,2) + y(0,1,1).$$

Luego

$$\{(1,0,2), (0,1,1)\}$$

es una base de S, pero no es ortogonal, pues $(1,0,2) \cdot (0,1,1) = 1 \neq 0$. Para determinar una base ortogonal es suficiente encontrar un vector w no nulo tal que $w \in S$ y que sea ortogonal a cualquiera de los vectores de la base. Entonces consideremos un vector $w = (x,y,z)$ tal que

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in S \quad &\Leftrightarrow \quad 2x + y - z = 0 \\ (x,y,z) \, . \, (0,1,1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y + z = 0. \end{aligned}$$

Estas dos condiciones determinan que $y = -z$ y $x = z$. Entonces

$$(x,y,z) = (-z,-z,z) = z(1,-1,1).$$

Se comprueba que este vector pertenece al plano y además es ortogonal con $(0,1,1)$. Luego

$$\{(1,-1,1), (0,1,1)\}$$

es una base ortogonal de S. Ahora podemos aplicar el Teorema 1.2.2. Dado $v = (1,2,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{proy}_S v &= \frac{(1,-1,1) \cdot (1,2,2)}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1) + \frac{(0,1,1) \cdot (1,2,2)}{\|(0,1,1)\|^2}(0,1,1) \\ &= \frac{1}{3}(1,-1,1) + 2(0,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(v,S) = \|v - \text{proy}_S v\| = \left\|(1,2,1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)\right\|.$$

Ahora resolveremos este ejercicio pero sin recurrir a proyecciones.

Consideremos el vector $v=(1,2,2)$ y el plano $2x+y-z=0$. Consideremos el punto P de coordenadas $(1,2,2)$ en el espacio y lo que queremos hacer es calcular la distancia de este punto al plano. Entonces podemos tratar de hallar la recta que pasa por $(1,2,2)$ y que corta en forma perpendicular al plano en un punto P'. Dicho punto, tiene un vector posición asociado que es $\overrightarrow{PO'}=P'-(0,0,0)$. Dicho vector es justamente el vector proyección del vector v sobre el plano.
La recta que pasa por el punto P y por P' tiene como vector director al vector normal al plano $n=(2,1,-1)$. Por lo tanto si llamamos r a esta recta tenemos que su ecuación vectorial es

$$(x,y,z)=(1,2,2)+\lambda(2,1,-1).$$

Podemos escribirla en la forma paramétrica como

$$\begin{aligned} x&=1+2\lambda\\ y&=2+\lambda\\ z&=2-\lambda \end{aligned}$$

El punto P' es la intersección de r con el plano. Entonces sustituímos la recta en la ecuación del plano

$$\begin{aligned} 2(1+2\lambda)+2+\lambda-(2-\lambda)&=0\\ 2+4\lambda+2+\lambda-2+\lambda&=0\\ 2+6\lambda&=0 \end{aligned}$$

Luego $\lambda=-\frac{1}{3}$. Sustituímos este valor en la ecuación paramétrica de la recta y obtenemos el punto P'

$$\begin{aligned} x&=1-2\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{3}\\ y&=2-\tfrac{1}{3}=\tfrac{5}{3}\\ z&=2+\tfrac{1}{3}=\tfrac{7}{3} \end{aligned}$$

Es decir,

$$P'=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{proy}_S v=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right).$$

Finalmente la distancia del punto P al plano, se obtiene calculando el módulo del vector $(1,2,1)-\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

$$d(v,S)=\left\|(1,2,1)-\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)\right\|.$$

El punto P' que corresponde a la intersección de la recta r con el plano ses la proyección del punto P sobre el plano π.

1.2.3. Proyección de un punto sobre una recta

La proyección de un punto P sobre una recta r es otro punto P' que está sobre la recta r y es tal que la recta que pasa por P y P' es perpendicular a r. También se puede definir como el punto P'" que se obtiene de la intersección de la recta r con el plano que contiene al punto P y es perpendicular a ella.

Como la recta r es ortogonal a la recta que pasa por P y P', entonces el vector $\overrightarrow{PP'}$ es ortogonal al vector director v_r de la recta r. Luego

$$\overrightarrow{PP'}\cdot v_r=0.$$

De esta ecuación y una representación paramétrica de la recta r se puede determinar el punto P'.

La otra forma, consiste en primero determinar el plano π que cumple las siguientes condiciones

$$\pi \perp r \text{ y } P \in \pi.$$

De la primera condición tendremos que el vector director v_r puede utilizarse como vector normal del plano. La segunda condición nos sirve para determinar el término d de la ecuación del plano $ax+by+cz+d=0$.

Ejemplo 1.3

Determinar la proyección del punto $P=(1,1,3)$ sobre la recta $(x,y,z)=(2,-3,1)+\lambda(2,-1,1)$.

Solución

Los resolvemos de las dos formas planteadas. Consideremos un punto P' que está sobre la recta. Por lo tanto, si escribimos la recta en la forma paramétrica tendremos

$$\begin{cases} x &= 2+2\lambda \\ y &= -3-\lambda \\ z &= 1+\lambda \end{cases}$$

Luego el punto P' debe ser de la forma $P'=(2+2\lambda,-3-\lambda,1+\lambda)$. Entonces el vector $\overrightarrow{PP'}$ es

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP'} &= (2+2\lambda,-3-\lambda,1+\lambda)-(1,1,3) \\ &= (1+2\lambda,-4-\lambda,-2+\lambda). \end{aligned}$$

Como

$$\overrightarrow{PP'}\cdot v_r = 0,$$

$$(1+2\lambda,-4-\lambda,-2+\lambda)\cdot(2,-1,1)=0$$

Entonces

$$2+4\lambda+4+\lambda-2+\lambda = 6\lambda+4=0$$

Luego $\lambda=-\frac{2}{3}$. Con este parámetro podemos determinar el punto P' como

$$\begin{aligned} P' &= (2+2\lambda,-3-\lambda,1+\lambda) \\ &= \left(2-\frac{4}{3},-3+\frac{2}{3},1-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},-\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

La otra forma implica que primero debemos buscar el plano π que es perpendicular a la recta r y que contiene al punto P. Como $\pi\perp r$, entonces el vector normal del plano es

$$n=v_r=(2,-1,1).$$

Como la ecuación general del plano es $ax+by+cz+d=0$, entonces

$$2x-y+z+d=0.$$

Para hallar d podemos utilizar el hecho de que el punto $P=(1,1,3)$ pertenece al plano π. Luego

$$2-1+3+d=4+d=0,$$

luego $d=-4$ y por lo tanto la ecuación del plano es

$$2x-y+z-4=0.$$

Ahora buscamos la intersección del plano con la recta

$$\begin{cases} 2x-y+z-4 & =0 \\ x=2+2\lambda \\ y=-3-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

Luego

$$4+4\lambda+3+\lambda+1+\lambda-4=4+6\lambda=0,$$

de donde obtenemos $\lambda=-\frac{2}{3}$. El punto se obtiene igual que antes,

$$P'=\left(\frac{2}{3},-\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right).$$

1.2.4. Proyección de un punto sobre un plano

La proyección de un punto P sobre un plano π es otro punto P', que está contenido en el plano y es la intersección del plano con la recta que pasa por el punto P y es perpendicular el plano, o lo que es equivalente el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al plano. Notemos que dicha recta tiene como vector director a cualquier vector paralelo al vector normal del plano.

Para denotar la proyección de P sobre π escribiremos $P'=\text{proy}_\pi P$. Entonces

$$P'=\text{proy}_\pi P \quad \Leftrightarrow \quad P'\in\pi \text{ y } \overrightarrow{PP'}\perp\pi.$$

Notemos que podemos también postular que

$$P'=\text{proy}_\pi P \quad \Leftrightarrow \quad P'\in\pi \text{ y } \overrightarrow{PP'}\|n,$$

donde n es el vector normal del plano π.

Ejemplo 1.4

Hallar la proyección del punto $P=(3,-2,1)$ sobre el plano $x-y+2z-1=0$.

Solución

Primero obtenemos la recta perpendicular a π y que pasa por P. El vector director v_r es paralelo al vector normal n de π . Entonces podemos tomar como director $n=(1,-1,2)$. Luego la recta es de la forma

$$(x,y,z)=(3,-2,1)+\lambda(1,-1,2)$$

y su forma paramétrica es

$$\begin{cases} x & =3+\lambda \\ y & =-2-\lambda \\ z & =1+2\lambda \end{cases}$$

Ahora buscamos la intersección de la recta con el plano, reemplazando las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$3+\lambda+2+\lambda+2+4\lambda-1=6\lambda+6=0.$$

Entonces $\lambda=-1$. Sustituímos en las ecuaciones paramétricas de la recta y obtenemos el punto

$$\begin{aligned} P' &= (3+\lambda,-2-\lambda,1+2\lambda) \\ &= (3-1,-2+1,1-2)=(2,-1,-1). \end{aligned}$$

Si utilizamos que el vector $P' \in \pi$ y $\overrightarrow{PP'} \| n$, entonces

$$\begin{aligned} x - y + 2z - 1 &= 0 \\ PP' &= \alpha\,(1, -1, 2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x - y + 2z - 1 &= 0 \\ x - 3 &= \alpha \\ y + 2 &= -\alpha \\ z - 1 &= 2\alpha \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema llegaremos al mismo resultado.

1.2.5. Proyección de una recta sobre un plano

Anteriormente analizamos la proyección de un punto sobre un plano. Ahora nos interesa analizar como se proyecta una recta sobre un plano.

Podemos definir la proyección de una recta r sobre un plano π como otra recta contenida en el plano y que está determinada por la proyección de los puntos que pertenecen a la recta r sobre el plano. También podemos decir que la recta r es la intersección del plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano dado. De esta forma la recta r' buscada es justamente la intersección del plano π' con el plano dado.

Vamos a analizar dos formas para determinar la recta r'.

1. Suponemos que la recta r *no* es paralela al plano π.

   Para determinar la recta r' necesitamos un punto P que sea intersección de la recta r con el plano π y un vector director $v_{r'}$. Este vector director se puede determinar como la proyección del vector director de v_r sobre el plano que tiene como vector normal al mismo vector normal que π pero que pasa por el origen. Es decir,

$$v_{r'} = \text{proy}_{\pi'} v_r,$$

   donde si la ecuación de π es $ax + by + cz + d = 0$, entonces la ecuación de π' es $ax + by + cz = 0$.

2. Supongamos que la recta r es paralela al plano. Esto quiere decir que el vector director v_r de r y el vector normal del plano son perpendiculares. En este caso la recta y el plano no se cortan. El vector director de la recta r' puede tomarse el mismo que la recta r, es decir v_r. Pero el punto debe P buscarse de otra forma. En este caso se puede tomar un punto Q de la recta r y buscar la proyección de ese punto, es decir, $P = \text{proy}_\pi Q$.

También existe un caso especial si la recta r es perpendicular al plano π. En este caso su proyección es un punto.

1. En forma alternativa y sin recurrir a la noción de proyección de un vector sobre un plano, podemos hallar la recta r' buscando dos puntos por donde pase. Un punto puede ser el punto P intersección de la recta r con el plano π, y el otro punto Q' que sea la proyección de un punto Q de r sobre π, es decir tomar los puntos

$$\begin{aligned} \{P\} &= r \cap \pi \\ Q' &= \text{proy}_\pi Q \end{aligned}$$

   y construir la recta r'que pasa por P y Q'.

Ejemplo 1.5

Dado el plano
$$\pi : x+y+z=3,$$
determinar la proyección de la recta $r:\ (x,y,z)=\lambda(0,2,1)$ sobre π.

Solución

Vamos a buscar la proyección utilizando los dos métodos descriptos anteriormente.
Primero utilizamos la noción de proyección de un vector sobre un plano.
Consideremos el plano $\pi' : x+y+z=0$. Notemos que los puntos de este plano son un subespacio, que denotaremos con el mismo símbolo π'. Busquemos la proyección del vector director $v_r=(0,2,1)$ sobre π'. Sabemos que para determinar esta proyección necesitamos una base ortogonal del subespacio π'. Como $x+y+z=0$, entonces $x=-y-z$. Tomando $z=0$ e $y=1$ obtenemos $x=-1$. Entonces tenemos un vector $u_1=(-1,1,0)$.Ahora necesitamos un vector $u_2=(x,v,z)$ tal que sea ortogonal al vector $u_1=(-1,1,0)$ y que además pertenezca al plano. Es decir, buscamos $u_2=(x,y,z)$ tal que

$$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(-1,1,0) & =0\\ x+y+z & =0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y & =0\\ x+y+z & =0\end{cases}$$

Luego $y=x$ y $z=-2x$. Entonces si damos el valor $x=1$, obtenemos $y=1$ y $z=-2$. Luego $u_2=(1,1,-2)$ es el vector buscado. Por lo tanto el conjunto

$$\{u_1=(-1,1,0)\,,u_2=(1,1,-2)\}$$

es una base ortogonal de π'. Entonces

$$\begin{aligned}v_{r'} &= \operatorname{proy}_{\pi'}v_r=\operatorname{proy}_{u_1}v_r+\operatorname{proy}_{u_2}v_r\\ &= \frac{(0,2,1)\cdot(-1,1,0)}{2}(-1,1,0)+\frac{(0,2,1)\cdot(1,1,-2)}{4}(1,1,-2)\\ &= \frac{2}{2}(-1,1,0)+\frac{0}{4}(1,1,-2)=(-1,1,0)\,.\end{aligned}$$

Ahora necesitamos determinar el punto P de intersección de la recta r con el plano π. Como

$$(x,y,z)=\lambda(0,2,1)=(0,2\lambda,\lambda)\,,$$

sustituímos en la ecuación del plano π y obtenemos

$$0+2\lambda+\lambda=3.$$

Entonces $\lambda=1$. Para obtener el punto P sustituímos el valor de λ en la ecuación de la recta, y obtenemos $P=(0,2,1)$.
Por lo tanto la ecuación vectorial de la recta r' es

$$(x,y,z)=P+\alpha v_{r'}=(0,2,1)+\alpha(-1,1,0)\,.$$

Ahora vamos a utilizar el segundo método descripto anteriormente.
Primer debemos determinar el punto P que corresponde a la intersección de la recta r con el plano π, y un punto Q' que sea la proyección de un punto Q de r sobre π, es decir tomar los puntos

$$\begin{aligned}\{P\} &= r\cap\pi\\ Q' &= \operatorname{proy}_{\pi}Q\end{aligned}$$

Con estos datos hallamos la recta r' que pasa por P y Q'. Buscamos entonces la intersección

$$r \cap \pi = \begin{cases} (x,y,z) = (0,2\lambda,\lambda) \\ x+y+z=3 \end{cases} \Rightarrow P = (0,2,1).$$

Ahora tomamos un punto Q de r y buscamos el punto $Q' = \mathrm{proy}_\pi Q$. Para ello debemos construir la recta r''que pasa por Q y tiene como vector director al normal de la recta $v_{r''} = (1,1,1)$. El punto Q puede ser el origen $Q = (0,0,0)$. Entonces la recta r'' es

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \alpha(1,1,1).$$

Buscamos la intersección con $x+y+z=3$ y obtenemos $\alpha = 1$. Por lo tanto e $Q' = (1,1,1)$. Finalmente la recta r' buscada pasa por los puntos $P = (0,2,1)$ y $Q' = (1,1,1)$. Como $v_{r'} = PQ' = Q'-P = (1,1,1)-(0,2,1) = (1,-1,0)$ entonces

$$(x,y,z) = (0,2,1) + \lambda(1,-1,0).$$

1.2.6. Matriz de proyección

En la sección 1.2.2 presentamos un método para hallar la proyección de un vector sobre un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Ahora veremos que dicha proyección se puede hallar también por medio de una matriz, llamada matriz de proyección.

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita y sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces sabemos que S está generado por un conjunto finito de vectores. Supongamos que

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

es una base de S. Si formamos la matriz cuyas columnas son lo vectores de S, es decir,

$$A = \left(v_1^t v_2^t \cdots v_k^t\right),$$

entonces

$$S = \mathrm{Co}(A) = \{v \in V : Ax = v, \text{ para algún } x \in V\}.$$

Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, podemos considerar el subespacio S generado por los vectores $v_1 = (1,-2,1)$ y $v_2 = (2,-1,3)$. Entonces la matriz a considerar es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Consideremos un vector arbitrario v de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que v se puede descomponer en la suma de dos vectores de la siguiente forma

$$v = \mathrm{proy}_S v + \mathrm{proy}_{S^\perp} v.$$

Si llamamos $\mathrm{proy}_S v = p$, tenemos que

$$\begin{aligned} p &\in S = \mathrm{Co}(A) \\ v-p &\in S^\perp = \mathrm{Co}(A)^\perp = \mathrm{N}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) \end{aligned}$$

Entonces

$$Ax = p \text{ y } A^t(v-p) = 0.$$

De la última igualdad obtenemos $A^t v - A^t p = 0$ y luego $A^t v = A^t p$. Sustituímos $Ax = p$ en la anterior igualdad y llegamos a que

$$A^t v = A^t A x.$$

Finalmente
$$x = \left(A^t A\right)^{-1} A^t v.$$
Luego la solución de la ecuación $Ax = p$ viene dada por $x = (A^t A)^{-1} A^t$. Por lo tanto
$$p = \text{proy}_S v = Ax = A\left(A^t A\right)^{-1} A^t v.$$
La matriz
$$\boxed{P_S = A\left(A^t A\right)^{-1} A^t,}$$
se conoce con el nombre de *matriz de proyección* en la base B. La misma nos permite calcular la proyección de cualquier vector v en la dirección del subespacio S.

Notemos que como A está formada por vectores linealmente independientes, entonces existe la matriz inversa A^{-1}. Por este hecho se puede demostrar que tambien existe la inversa de $A^t A$. Por lo tanto existe la matriz $P_S = A\,(A^t A)^{-1} A^t$.

N En la nota 1.2.2 vimos que ocurre con las proyecciones cuando actuan sobre vectores del subespacio o vectores del subespacio ortogonal. Ahora veremos que podemos llegar a la misma conclusión utilizando la matriz de proyección.
Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^m$ con una base de n vectores y sea A la matriz de tamaño $m \times n$ tal que $S = \text{Co}(A)$. Sea P_S la matriz de proyección asociada a S. Para cada $v \in S = \text{Co}(A)$, existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = Ax$. Entonces
$$\begin{aligned}\text{proy}_S v = P_S v &= A\left(A^t A\right)^{-1} A^t A x = \\ &= A\underbrace{\left(A^t A\right)^{-1}\left(A^t A\right)}_{I} x = Ax = v.\end{aligned}$$
Por lo tanto, cuando $v \in S$, $\text{proy}_S v = v$.
Si $u \in S^\perp = \text{Co}(A)^\perp$, entonces $u \in \text{N}(A^t)$, es decir, $A^t u = 0$. Luego
$$\text{proy}_S u = P_S u = A\left(A^t A\right)^{-1} \underbrace{A^t u}_{=0} = 0.$$
Por lo tanto, $\text{proy}_S u = 0$ cuando $u \in S^\perp$.

Ejemplo 1.6

Determinar la proyección del vector $v = (1,-2,3)^t$ en la ditrección del subespacio $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\right\}$ utilizando la matriz de proyección.

Solución
El subespacio S está generado por los vectores $v_1 = (1,1,0)$y $v_2 = (-1,0,1)$. Entonces la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es tal que $S = \text{Co}(A)$. Como $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y
$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \left(A^t A\right)^{-1} =$$

Entonces

$$P_S = A\left(A^t A\right)^{-1} A^t$$

y

$$\text{proy}_S v = P_S \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

En algunos casos es más sencillo calcular primero la proyección sobre $S^{\perp}$ y después la proyección en la dirección de S. Esto ocurre cuando el espacio $S^{\perp}$ es de menor dimensión. Es decir primero calculamos $\text{proy}_{S^{\perp}} v$ y después aplicamos la identidad $\text{proy}_S v = v - \text{proy}_{S^{\perp}}$. En este ejemplo, tenemos que $S^{\perp} = \langle(1,-1,1)\rangle$ y por lo tanto

$$\text{proy}_{S^{\perp}}(1,-2,3) = \frac{(1,-2,3)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) =$$

1.3. Procedimiento de Gram-Schmidt

Ver Álgebra Lineal, Stanley Grossman y José Job Flores, Septima edición,Mc Graw Hill, 2012.

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales.

1. $\{(4,2,-5),(-1,2,0),(2,1,2)\}$.
2. $\{(3,1,-1),(-1,2,1),(2,-2,4)\}$.

Ejercicio 1.2. Estudie si los siguientes conjuntos de vectores forman una base ortogonal. Luego utilice el Teorema 1.1 para expresar al vector w como una combinación lineal de los vectores de la base. Halle el vector de coordenadas $[w]_B$ de w con respecto a la base. Determine si las bases son ortonormales. En caso de que no lo sean normalice los vectores para formar una base ortonormal.

1. $v_1 = (4,-2)$, $v_2 = (1,2)$, $w = (1,3)$.
2. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (1,-1,1)$ y $w = (1,1,1)$.

Ejercicio 1.3. Hallar bases ortogonales y ortonormales de los siguientes subespacios y las coordenadas del vector w en dichas bases

1. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y-z=0\right\}$, $w = (-1,2,5)$.
2. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=\alpha,\ y=-\alpha,\ z=3\alpha\right\}$, $w = (1,-,3)$

Ejercicio 1.4. Determinar las proyecciones de los siguientes vectores en las direcciones dadas:

1. El vector $u = (2,3)$ en la dirección de $v = (1,4)$.
2. El vector $u = (1,2,3)$ en la dirección de $v = (1,1,-1)$.
3. El vector $u = (-1,1,2)$ en la dirección de la recta $r : \begin{cases} 2x-y+3z & = 0 \\ x+y+z & = 0 \end{cases}$

Ejercicio 1.5. Determine la proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio S generado por los vectores que se indican.

1. $v = (3,1,-2)$, $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$.
2. $v = (3,-2,4,-3)$, $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (1,-1,-1,1)$, $u_3 = (0,0,1,1)$.

Ejercicio 1.6. En los siguientes apartados se da un subespacio S y un vector v. Hallar el complemento ortogonal $S^{\perp}$. Luego calcular la proyección del vector v sobre el subespacio S, y sobre el espacio $S^{\perp}$. Escriba a v como suma de un vector $v_1 \in S$ y otro $v_2 \in S^{\perp}$.

1. $S = \langle (1,2,1),(1,1,1) \rangle$.
2. $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\right\}$, $v = (-1,2)$.
3. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+2z\right\}$, $v = (3,-1,2)$.
4. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}$, $v = (2,1,1)$.
5. $S = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0\right\}$, $v = (1,1,1,1)$.

Ejercicio 1.7. En los siguientes casos hallar la matriz de proyección y calcular proyección del vector v sobre el subespacio S.

1. $v = (1,2,3)$, $S = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}$.
2. $v = (1,2,1)$, $S = \left\{x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z=0\right\}$.
3. $v = (4,1,3,4)$, $S = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1),(1,1,1,1) \rangle$.

Ejercicio 1.8. Determinar la distancia del punto a la recta y la proyección del punto a la recta en los siguientes casos

1. Punto $P=(-2,0,1)$ y la recta $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{3}=z+1$.
2. Punto $P=(2,-1,3)$ y recta $r:\begin{cases} x-y+2z & =1 \\ -x+2y-z & =2 \end{cases}$.

Ejercicio 1.9. Determinar la proyección ortogonal de la recta $r:\ (x,y,z)=(1,1,-1)+\alpha(1,2,1)$ sobre el plano $\pi:\ 2x-y+z=2$.

Ejercicio 1.10. Dada la recta $r:\ (x,y,z)=(1,1,0)+\alpha(a,-2,b)$, hallar los valores de a y b para que la proyección de r sobre el plano $\pi:\ -x+4y+z=-2$ sea un punto. ¿Cuál es dicho punto?

Ejercicio 1.11. Determinar la proyección del punto $P=(1,1,-1)$ sobre la recta $r:\begin{cases} 2x+y-z & =1 \\ x-y+z & =0 \end{cases}$.

Ejercicio 1.12. Determinar la proyección del punto $P=(-1,2,2)$ sobre el plano $x-y+z=2$.

Ejercicio 1.13. Consideremos la recta r definida como

$$r:\begin{cases} x-y-z=1 \\ y-cz=0 \end{cases}$$

y el plano

$$\pi:\ x+y=0.$$

1. Determinar $c\in\mathbb{R}$ para que la recta r sea paralela al plano π.
2. Para el valor c encontrado, hallar la proyección de la recta r sobre el plano π. Al resolver el problema realizar un esquema gráfico de la situación.

Ejercicio 1.14. Usar Gram-Schmidt (GS) para hallar una base ortonormal de los siguientes subespacios:

1. $S=\langle(1,0,0),(2,1,0),(3,1,1)\rangle$.
2. $S=\langle(1,0,1,0),(2,1,0,1),(0,1,2,3)\rangle$.
3. $S=\langle(1,2,0,2),(2,4,1,4),(1,3,1,1)\rangle$.

Ejercicio 1.15. En cada ítem, determinar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores indicados:

1. $v=(1,2,3)$
2. $v=(3,5,1)$.