Índice general

1 Matrices y Sistemas de Ecuaciones lineales

1.1. Matrices

Las matrices son disposiciones o arreglos bidimensionales que permiten interpretar problemas en diversas ramas de la ciencia, como Biología, Economía, Ingeniería, etc. Las matrices son esenciales para analizar sistemas de ecuaciones lineales, como veremos más adelante. Por ahora se verán como objetos un poco abstractos, pero a medida que desarrollemos los temas podremos apreciar la necesidad y utilidad de las matrices.

Algunos ejemplos elementales de matrices son las siguientes

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ -3 & -x & a \end{pmatrix}, (2,3,0,-1), \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Las matrices se clasifican de acuerdo a su ***tamaño***, el cual está expresado en la cantidad de filas y columnas que tiene cada matriz. Como ejemplos de matrices y sus respectivos tamaños podemos mencionar

Matriz	Tamaño: filas por columnas
$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$	2×2
$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$	3×3
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 12 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{4\times 3}$	4×3
$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -9 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$	2×4

Ahora damos la definición general de matriz.

Definición 1.1

Una *matriz* de m filas por n columnas es una disposición de elementos de un conjunto (en general números reales) de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Los elementos

$$a_{ij}$$

con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, se llaman los ***coeficientes*** de la matriz A. El elemento a_{ij} es el elemento de la matriz A que está ubicado en la fila i y en la columna j.

Si queremos indicar que una matriz de tiene m filas y n columnas de números reales podemos escribir $A_{m\times n}$ o $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4} \quad \text{o también} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

1.1.1. Tipos de matrices

Recordemos algunas matrices especiales y que aparecerán en distintas partes del curso.

- **Matrices cuadradas.** Una matriz es cuadrada si tiene igual número de filas y de columnas.

  Denominamos $\mathbb{R}^{n\times n}$ al conjunto de matrices cuadradas de orden n (n filas y n columnas) con coeficientes reales. La diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{ii}. Por ejemplo, las siguientes son matrices de orden 2 y 3, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -4 & 0 \\ 3 & \mathbf{3} & -1 \\ 2 & 6 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna**

$$c = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

  De esta forma un vector en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ puede ser considerado como una matriz columa. Por ejemplo,

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

- **Matriz fila**

$$f = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

  Con esta notación los vectores pueden ser pensados como matrices fila. Por ejemplo,

$$(-1, 2, -4, 3) \in \mathbb{R}^{1\times 4}.$$

- **Matriz identidad.** La matriz identidad de orden n es la matriz de tamaño $n \times n$ donde los elementos de la diagonal son todos iguales a 1 y el resto son ceros.

  Es decir, $a_{ii} = 1$, para todo $1 \leq i \leq n$, y $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz nula.** Es la matriz, simbolizada por $\vec{0}$ o $\mathbf{0}$, cuyos coeficientes son todos ceros. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

  es una matriz nula.

- **Matrices triangulares.** Una matriz cuadrada de orden n es *triangular superior* (*inferior*) si todos los elementos debajo (encima) de la diagonal principal son ceros. Por ejemplo, la primer matriz diagonal *superior* y la segunda es diagonal *inferior*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal.** Una matriz cuadrada de orden n es *diagonal* si es triangular superior y triangular inferior. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.2

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo tamaño y además

$$a_{ij} = b_{ij},$$

para cada i y para cada j.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-1 & 4 \\ 3 & 10-4 & 3+2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.1

Determinar los valores de x e y para que las siguientes matrices sean iguales

$$A = \begin{pmatrix} x^2-x-4 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & y^3-20 & 4 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 4} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Como queremos que las matrices sean iguales, entonces debemos comparar elemento a elemento de cada matriz, respetando el lugar. Claramente debemos plantear las siguientes ecuaciones

$$x^2 - x - 4 = 2, \text{ o lo que es lo mismo } x^2 - x - 6 = 0,$$

y

$$y^3 - 20 = 7 \text{ o lo que es igual } y^3 - 27 = 0.$$

Estas ecuaciones son equivalentes a

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 & = 0 \\ y^3 - 27 & = 0 \end{cases}$$

Resolvemos la primer ecuación

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4{,}1.(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Entonces

$$x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -2,$$

son las soluciones a la ecuación. Ahora analizamos la segunda ecuación de $y^3 - 27 = 0$. En este caso tenemos una sola posibilidad que es $y = 3$. Por lo tanto considerando los posibles valores de x e y, llegamos a que hay dos posibles elecciones para que las matrices A y B sean iguales. Por un lado

$$x = 3 \text{ e } y = 3,$$

y por otro lado

$$x = -2 \text{ e } y = 3.$$

1.2. Operaciones con matrices

1.2.1. Suma de matrices

La suma de las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz $C = A + B$ cuyos coeficientes son

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que para sumar dos matrices deben tener el mismo tamaño. Es decir, la misma cantidad de filas y de columnas.

1.2.2. Producto de un escalar por una matriz

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces el producto del escalar λ por la matriz A es otra matriz cuyos coeficientes son los productos λa_{ij}, donde $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

Por ejemplo,

$$3. \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 0 \\ 9 & 9 & -3 \\ 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Producto de matrices

Vamos a definir el producto de una matriz fila por una matriz columna y utilizar esa idea para definir en general el producto de matrices. Como veremos, no es posible realizar el producto entre cualquier par de matrices. Los tamaños de las matrices que intervienen deben estar relacionados en cierta manera.

Consideremos una matriz fila y una matriz columna

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

El producto de A por B lo definimos como

$$\begin{aligned} AB &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \end{aligned}$$

Ahora vamos adefinir el producto entre dos matrices, pero sujeto a una restricción que se deduce del producto anterior. Debemos multiplicar una fila de una matriz por una columna de la otra y deben tener el mismo tamaño. Por lo tanto, la matriz A debe tener tantas columnas como filas tenga la matriz B.

Si, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, entonces el producto de A por B es una matriz C

$$A_{m\times n}.B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

donde

$$A_{m\times n}.B_{n\times k} = C_{m\times k}, \text{ donde } c_{ij} = \text{fila } i \text{ de } A \text{ por columna } j \text{ de } B.$$

Formalmente podemos escribir

$$AB = C, \text{ donde los coeficientes son } c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}.$$

Ejemplo 1.2

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

En este caso se puede realizar el producto ya que la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 3 filas. Multiplicamos, con el producto escalar, la primera fila de la matriz A por la primer fila de la matriz B

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & -4 & 0 \\ \mathbf{3} & 3 & -1 \\ \mathbf{2} & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 \\ 32 & 20 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Notemos que no es posible calcular BA, pues el número de columnas de B es distinto al número de filas de A. En consecuencia el producto no siempre existe y cuando existe no es necesariamente conmutativo.

Teorema 1.1

Sean A,B,C matrices. Entonces

1. Si $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,$B\in\mathbb{R}^{n\times k}$ y $C\in\mathbb{R}^{k\times l}$, entonces $(AB)C=A(BC)$.
2. Si $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,$B,C\in\mathbb{R}^{n\times k}$, entonces $A(B+C)=AB+AC$.
3. Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $AI=IA=A$, donde I es la matriz identidad.

1.2.4. Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ la matriz ***traspuesta*** de A, simbolizada por A^t, es la matriz de tamaño $n\times m$ que se obtiene intercambiando las filas por las columnas. Por ejemplo,

Traspuesta

$$v=(1,-2,3) \qquad v^t=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&2&5\end{pmatrix}_{2\times3} \qquad A^t=\begin{pmatrix}1&4\\-2&2\\3&5\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&-4&0\\3&3&-1\\2&6&0\end{pmatrix} \qquad B^t=\begin{pmatrix}1&3&2\\-4&3&6\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Con la noción de matriz traspuesta podemos introducir otras clases importantes de matrices.

Definición 1.1

Diremos que una matriz cuadrada A de orden n es ***simétrica*** si

$$A=A^t.$$

Diremos que una matriz cuadrada A de orden n es ***antisimétrica*** si

$$A=-A^t.$$

Ejemplo 1.1

La siguiente matriz es simétrica

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\-1&5&6\\4&6&-3\end{pmatrix}=A^t.$$

La siguiente es una matriz antisimétrica

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\1&5&6\\4&6&-3\end{pmatrix}=-B^t.$$

Enunciamos algunas propiedades de la traspuesta de una matriz.

Lema 1.1 Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(c.A)^t = c.A^t$, donde c es una constante.
3. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Lema 1.2 Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces

1. AA^t y A^tA son simétricas.
2. $A+A^t$ es simétrica.
3. $A-A^t$ es antisimétrica.
4. Si A es inversible y simétrica, entonces A^{-1}es simétrica.
5. A es suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

Ejemplo 1.2

Hallar una matriz $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que
$$X - 3A = 2A + B^t,$$
donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución

Indicamos en cada renglón la operación realizada

$$\begin{array}{rcll} X-3A & = & 2A+B^t & \\ X & = & 2A+B+3A & \quad \text{sumamos en ambos miembros } 3A \\ X & = & B^t+5A & \end{array}$$

Calculamos B^t
$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 15 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 19 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2.5. Inversa de una matriz

Ahora definiremos una operación entre matrices cuadradas llamada inversa de una matriz. Esta operación no siempre es posible, como veremos más adelante. Recordemos que una matriz de tamaño n es una matriz cuadrada de $n \times n$.

Definición 1.2

Sea A una matriz de tamaño n. Diremos que A es inversible o no singular si existe una matriz B de orden n tal que

$$AB = BA = I_n,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. La matriz B se llama la inversa de A. Una matriz que no tiene inversa se dice no invertible o singular.

Se puede demostrar que si A es una matriz cuadrada de tamaño n y existe otra matriz B de tamaño n tal que

$$AB = I_n,$$

entonces B es la matriz inversa de A. Es decir, no es necesario verificar la otra igualdad $BA = I_n$.

Una propiedad importante de la inversa es la siguiente.

Lema 1.3 Si A es una matriz inversible, entonces su inversa es única.

Dado que si existe la inversa de una matriz A esta es única, entonces la denotaremos por A^{-1}.

Ejemplo 1.3

Demostrar que la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

En efecto

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} + \frac{6}{7} & \frac{2}{7} - \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} & \frac{6}{7} + \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se deja al lector comprobar que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.4

Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Solución

Para saber si A tiene inversa debemos resolver la ecuación matricial $AX = I$. Supongamos que $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualando los elementos correspondientes obtenemos dos sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 3a+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b+d=0 \\ 3b+2d=1 \end{cases}$$

Resolvemos el primer sistema, despejando $c=1-2a$ y sustituyendo en la segunda ecuación $3a+2(1-2a)=3a+2-4a=0$. Entonces $2-a=0$, es decir $a=2$. Luego se $c=-3$. Realizando cálculos similares en el segundo sistema obtenemos $b=-1$ y $d=2$. Por lo tanto la matriz inversa de A es

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Queda al lector verificar que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

Más adelante cuando estudiemos la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio del método de Gauss-Jordan obtendremos una forma para calcular la inversa de matrices de mayor tamaño.

Lema 1.4 Sean $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices inversibles. Entonces

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
3. $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$, donde k es un número real distinto de cero.
4. La traspuesta A^t es inversible y además se cumple que $(A^t)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$.

Ahora vamos a definir algunas clases de matrices cuadradas que tendrán un papel muy importante en la teoría desarrollada en este curso.

Matriz ortogonal

Una matriz $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal cuando su traspuesta coincide con su inversa: es decir:

$$A^t=A^{-1}.$$

Por ejemplo,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal.

1.3. Sistemas de Ecuaciones lineales

Recordemos que una ecuación lineal de dos variables es un ecuación que se puede escribir en la forma

$$ax+by=d,$$

donde a,b y c son números, y x e y son las variables. Por ejemplo,

$$3x-y=1,$$

es una ecuación en las variables x e y. Podemos interpretar esta ecuación como la ecuación que corresponde a una recta en el plano $\mathbb{R}^2$. Los pares (x,y) que satisfacen la ecuación son los puntos que están sobre la recta.

De igual forma, una ecuación lineal en tres variables es una expresión de la forma

$$ax+by+cz=d,$$

donde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Esta ecuación representa un plano en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo la ecuación

$$4x-y+5z=3,$$

corresponde a un plano.

Siguiendo con esta generalización, una ecuación lineal de n variables es una expresión de la forma

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b, \tag{1.1}$$

donde $a_1,\ldots,a_n$ y b son números reales. Los números reales $a_1,\ldots,a_n$ se denominan los *coeficientes* de la ecuación. El número b es el término constante. Esta ecuación representa un hiperplano en el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$.

Una **solución** de la ecuación (1.1) es una secuencia $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ tal que

$$a_1s_1+a_2s_2+\ldots+a_ns_n=b,$$

es decir, la ecuación es válida cuando sustituímos en cada lugar de la variable x_i por el valor s_i.

Antes de dar la definición general de un sistema de m ecuaciones con n incognitas, recordemos que ocurre en el plano $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.5

Consideremos las dos rectas siguientes:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y & = & 3\\ x+3y & = & 5\end{array}\right. \tag{1.2}$$

Resolver este sistema significa encontrar si existe un punto $P=(x_0,y_0)$ que satisfaga a las *dos* ecuaciones en forma simultanea. En caso de que exista dicho punto, corresponde al punto intersección de las dos rectas. Es decir, al reemplazar el punto P en cada ecuación debería satisfacer la igualdad. Por ejemplo, si sustituímos el punto $(0,-3)$ en cada una de las ecuaciones obtenemos

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2(0)-(-3) & = & 3\\ 0+3(-3) & =9\neq & 5\end{array}\right.$$

Por lo tanto, el punto satisface la primer ecuación pero no la segunda, es decir, el punto $(0,-3)$ *no* satisface el sistema (1.2). Por otra parte, es sencillo comprobar que el par $(2,1)$ si satisface al sistema (1.2). En este caso decimos que el par $(2,1)$ es una solución del sistema (1.2).

Como cada ecuación representa una recta en el plano, y sabemos que dos rectas pueden cortarse en un punto o ser paralelas, entonces la solución del sistema puede ser un único punto o ningún punto. Por lo tanto resolver el sistema (1.2) es equivalente a preguntarse si estas rectas se intersectan o no, y si tienen intersección saber cual es el punto de intersección.

Para determinar el punto solución P podemos utilizar varios procedimientos. El que todos conocemos consiste en despejar de una ecuación una variable, sustituirla en la otra ecuación, determinar un valor y después sustituir ese valor en alguna de las otras dos ecuaciones. De esa forma determinamos el punto P. En este caso podemos proceder de la siguiente forma. De la primer ecuación despejamos la variable y

$$y=2x-3.$$

Sustituimos la expresión encontrada en la segunda ecuación

$$x+3(2x-3)=7x-9=5.$$

Es decir,

$$x = \frac{14}{7} = 2.$$

Ahora sustituímos este valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones para encontrar el valor de y. En este caso se puede sustituir en $y = 2x - 3$, obteniendo

$$y = 1.$$

Por lo tanto la solución es el punto del plano $P = (2,1)$. El punto solución corresponde a la intersección de las dos rectas.

Ahora damos la definición general de un sistema de m ecuaciones lineales con n incognitas.

Definición 1.3

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incognitas es un conjunto de m ecuaciones cada una con n incognitas dispuestas de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12} + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{12} + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1.3}$$

El sistema es *homogéneo* cuando $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Una *solución* del sistema (1.3) es una n-upla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que satisface simultaneamente a cada una de las ecuaciones lineales que ocurren en el sistema (1.3).

Ejemplo 1.6

Consideremos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incognitas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + z & = & 2 \\ -x - y - 2z & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Cada una de las ecuaciones representa un plano en $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, buscar una solución de este sistema significa estudiar si los tres planos tienen una intersección común. Las posibilidades que se presentan son las siguientes:

- Los tres planos se cortan en un punto. En este caso decimos que el sistema (1.4) es compatible determinado (tiene una sola solución representada por un punto de $\mathbb{R}^3$).
- Los tres planos se cortan en una recta o representan el mismo plano. En este caso decimos que el sistema (1.4) es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).
- No existe intersección entre los tres planos. En este caso decimos que es un sistema incompatible.

En este caso es sencillo comprobar que la terna

$$\left(\frac{11}{9}, -\frac{5}{9}, -\frac{1}{3} \right)$$

es una solución del sistema (1.4). De hecho es la única solución, como se podrá comprobar más adelante.

Matriz asociada a un sistema. Notación vectorial

Vamos a introducir la notación matricial para escribir un sistema de ecuaciones lineales. Lo veamos con un ejemplo concreto. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1\\ 2x+y+z &=& 0\\ -x+y+z &=& 1\end{array}\right.$$

Utilizando la notación matricial podemos escribir al sistema como un producto de una matriz A, llamada matriz de los coeficientes del sistema, por un vector columna $\vec{x}$,e igualado a un vector columna $\vec{b}$. En este ejemplo,

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz de los coeficientes, son los números que acompañan a las incognitas.

2. $\vec{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ es la matriz columna cuyos elementos son las incógnitas del sistema, y

3. $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ es la matriz columna formada por los términos independientes del sistema.

Entonces el sistema se puede escribir en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

En forma sintética

$$A\vec{x}=\vec{b}.$$

La *matriz aumentada* asociada al sistema es la matriz

$$(A\mid\vec{b})=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

El tamaño de una matriz indica su número de filas y columnas. En este ejemplo, la matriz A es de tamaño 3×3 y la matriz aumentada $(A\mid b)$ es de tamaño 3×4.

Tenemos otra forma de escribir a un sistema considerando las columnas de la matriz de los coeficientes A como vectores columnas. El ejemplo anterior se escribe como

$$A\vec{x}=x\underbrace{\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}}_{\vec{c}_1}+y\underbrace{\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{c}_2}+z\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{c}_3}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Esta notación vectorial de un sistema nos sugiere que resolver este sistema significa responder si el vector $\vec{b}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{c}_1$,$\vec{c}_2$ y $\vec{c}_3$. Por lo tanto podemos afirmar que:

$$A\vec{x}=\vec{b}\text{ sii }\vec{b}\text{ es combinación lineal de }\vec{c}_1,\vec{c}_2\text{ y }\vec{c}_3\text{ sii }\vec{b}\in\langle\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3\rangle.$$

Generalizamos la notaciones anteriores a cualquier sistema de m-ecuaciones con n-incognitas. Consideremos el sistema de m ecuaciones con n incognitas siguiente

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12} + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{12} + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

En notación matricial podemos escribir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}},$$

o

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

La matriz

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se llama la *matriz ampliada* del sistema.

Por último, tambien podemos utilizar la *notación vectorial*

$$A\vec{x} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\vec{c_1}} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\vec{c_2}} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\vec{c_n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

En este caso representamos a cada columna de la matriz A como un vector columna. Por lo tanto

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ sii } \vec{b} \in \langle \vec{c_1}, \vec{c_2}, \dots, \vec{c_n} \rangle.$$

Dado un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, el *sistema homogéneo* asociado es $A\vec{x} = \vec{0}$.

Conjunto solución de un sistema.
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Una *solución* de sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

es una n-upla de números reales

$$\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

que satisface cada una de las ecuaciones del sistema. Simbolizaremos con

$$S = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b}\right\},$$

al conjunto de todas las soluciones del sistema, y con

$$\mathrm{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\right\}$$

al conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Ahora vamos a clasificar los sistemas de acuerdo a sus posibles soluciones.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales. Diremos que el sistema es

1. **Compatible**
   - *a*) **Determinado** si tiene una **única** solución.
   - *b*) **Indeterminado** si tiene **infinitas** soluciones.
2. **Incompatible** si no tiene ninguna solución.

Todo sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$ siempre tiene al menos una solución, la solución trivial $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Por lo tanto todo sistema homogéneo es compatible. Cuando existe otras soluciones distintas de la trivial es compatible indeterminado.

Presentamos un diagrama con la clasificación de los sistemas de ecuaciones de acuerdo a sus soluciones:

$$\text{SEL:} \begin{cases} \text{No homogéneo } A\vec{x} = \vec{b} & \begin{cases} \textbf{Compatible} \text{ (con solución)} & \begin{cases} \textbf{Determinado} \text{ (única solución)} \\ \textbf{Indeterminado} \text{ (infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \textbf{Incompatibles} \text{ (sin solución)} \end{cases} \\ \text{Homogéneo} A\vec{x} = \vec{0} & \textbf{Compatible} \begin{cases} \textbf{Determinado} \text{ (solución trivial)} \\ \textbf{Indeterminado} \text{ (infinitas soluciones)} \end{cases} \end{cases}$$

1.4. Escalonamiento de una matriz. Rango

El procedimiento que seguimos en el Ejemplo 1.3 se puede emplear en un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas. Pero es claro que a mayor cantidad de ecuaciones e incognitas el método descripto no resulta práctico. Ahora veremos un método, llamado método de eliminación gaussiana que nos permitirá determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales..

Una fila o columna distinta de cero (o no nula) de una matriz será una fila o columna que contenga al menos un elemento diferente de cero; una entrada principal o **pivote** de una fila es el elemento diferente de cero que se encuentra más a la izquierda (en una fila distinta de cero).

Definición 1.4 Forma escalonada de una matriz

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ está en la forma **escalonada, o forma escalonada por filas,** si satisface las siguientes propiedades:

1. Cualquier fila formada enteramente de ceros está en la parte inferior de la matriz.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo un pivote son ceros.

Diremos que una matriz está en la forma escalonada **reducida por filas** si está en la forma escalonada, cada pivote es igual a 1 y todos los elementos por encima de cada pivote son iguales a cero.

Las siguientes matrices están en forma *escalonada* por filas. Los pivotes están marcados en negrita.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 4 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 & -2 & 1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

Las siguientes matrices están en forma *escalonada reducida* por filas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Para obtener una matriz en la forma escalonda o en la forma escalonada reducida por filas debemos realizar ciertas operaciones entre las filas. Estas operaciones son llamadas *operaciones elementales* entre filas de una matriz. A continuación enunciamos dichas operaciones elementales.

Operaciones elementales entre filas de una matriz

Llamaremos operaciones elementales entre filas de una matriz a las siguientes operaciones

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplica una fila por una constante distinta de cero.
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

La matriz obtenida se dice que ha sido reducida por medio de operaciones elementales por filas.

Sean $A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Una matriz A es ***equivalente*** a una matriz B si existe una secuencia finita de operaciones elementales entre filas que convierte la matriz A en la matriz B. En este caso podemos escribir

$$A \sim B$$

para indicar que las matrices A y B son equivalentes por filas.

Por ejemplo, las matrices siguientes son equivalentes, pues la segunda se obtiene de la primera realizando la operación indicada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_1-F_3]{2F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cualquier matriz distinta de cero puede reducirse por encontrar una matriz que esté en la forma escalonada. Esto se puede hacer de diversas formas, depende de como se hagan las operaciones entre las filas. Por lo tanto podemos obtener varias matrices que están en la forma escalonada para una matriz determinada. Pero, la forma *escalonada reducida* que se obtiene a partir de una matriz es única. Lo enunciamos en el siguiente teorema.

Proposición 1.1

1. Cualquier forma escalonada de una matriz A de tamaño $m \times n$ tiene el mismo número de filas distintas de ceros.

2. Cada matriz es equivalente por filas a una y sólo a una matriz escalonada reducida.

Ejemplo 1.7

Determinar una forma escalonada y una forma escalonda reducida por filas de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

Escalonando obtenemos la siguiente sucesión de matrices equivalentes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = E$$

Por lo tanto una forma escalonada de la matriz A es la matriz E. Ahora seguimos operando entre filas en la matriz E hasta obtener la forma escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)F_3]{\frac{1}{4}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{\frac{3}{4}F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como no importa como escalonemos una matriz, siempre nos quedará la misma cantidad de filas no nulas, entonces a la cantidad de filas no nulas que resultan después de una diagonalización le daremos un nombre.

Definición 1.5 (Rango de una matriz)

El ***rango*** de una matriz A es el número de filas no nulas en cualquier forma escalonada por filas. Denotaremos con $\text{rg}(A)$ al rango de una matriz A.

Ejemplo 1.8

La matriz escalonada en el Ejemplo 1.4 tiene rango 3 pues hay tres filas no nulas después de escalonar.

Un elemento pivote de una fila de una matriz es el primer elemento (de izquierda a derecha) que no es cero en esa fila.

N Sea A una matriz $m \times n$ y sea B cualquier forma escalonada por filas de la matriz A. Entonces podemos notar que

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A) &= \text{numero de filas no nulas de } B\\ &= \text{número de pivotes}\\ &= n - \text{número de filas nulas en la forma escalonada.}\end{aligned}$$

Notemos que el número de filas nulas es igual a $m - \operatorname{rg}(A)$.

Ejemplo 1.9

Calcular el rango de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Solución

Escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-F_2]{F_1-2F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Luego el rango de la matriz es 3.

Ejemplo 1.10

Calcular el rango de la siguiente matriz en función de x, y y z

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & x\\ 4 & 8 & 12 & y\\ 6 & 7 & 13 & z\end{pmatrix}.$$

Solución

Escalonamos y obtenemos la siguiente sucesión de matrices equivalentes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & x\\ 4 & 8 & 12 & y\\ 6 & 7 & 13 & z\end{pmatrix} \xrightarrow[3F_1-F_3]{2F_1-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & x\\ 0 & -2 & -2 & 2x-y\\ 0 & 2 & 2 & 3x-z\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & x\\ 0 & -2 & -2 & 2x-y\\ 0 & 0 & 0 & 5x-y-z\end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A) &= 3 \text{ si } 5x-y-z \neq 0\\ \operatorname{rg}(A) &= 2 \text{ si } 5x-y-z = 0.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que cualquier matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se puede transformar en la matriz identidad I_n aplicando transformaciones elementales entre filas, podemos enunciar el siguente lema.

Lema 1.5 Sea A una matriz de orden n. Entonces

$$\operatorname{rg}(A) = n \text{ sii } A \underset{f}{\sim} I_n.$$

Por la Proposición 1.4 la cantidad de filas no nulas de una matriz escalonada es independiente de como hagamos el escalonamiento. Esto es lo mismo decir que si tenemos un sistema de ecuaciones lineales podemos cambiar el orden de las ecuaciones, o sumar dos filas, o multiplicar una ecuación por un escalar, y el sistema resultante es equivalente al inicial, en el sentido que tienen las mismas soluciones.

Vamos a enunciar que el rango de una matriz y su traspuesta coinciden.

Lema 1.6 Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ su traspuesta. Entonces

1. $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^t)$.
2. Si A es una matriz cuadrada, entonces $A \underset{f}{\sim} A^t$.

Ejemplo 1.11

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución

Notemos que

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^t) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Ya estamos en condiciones de describir el método para estudiar las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Teorema 1.2

Consideremos un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$. Sea $(E \mid d)$ una forma escalonada de la matriz ampliada $(A \mid b)$. Entonces los sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$ y $E\vec{x} = \vec{d}$ tienen la misma solución.

El Teorema 1.4 nos permite describir un método para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, en caso de que exista. Cuando aplicamos reducción por filas de una matriz aumentada correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales obtenemos un sistema de ecuaciones lineales equivalente, es decir, con las mismas soluciones. Este proceso se llama *método de eliminación de Gauss. Cuando obtenemos una matriz reducida por filas se conoce como método de Gauss-Jordan.*

Por claridad vamos a precisar los pasos a seguir para resolver un sistema de ecuaciones linelaes.

Método de eliminación de Gauss

Consideremos un sistema un sistema de ecuaciones lineales

$$A\vec{x}=\vec{b}.$$

1. Construímos la matriz aumentada del sistema
$$(A \mid b).$$
2. Por medio de operaciones elementales por filas reducimos la matriz aumentada a la forma escalonada por filas, quedando una nueva matriz
$$(E \mid d).$$
3. Si en la matriz $(E \mid d)$ aparece una fila de la forma $[0 0 0 \ldots 0 \mid s]$ con $s \neq 0$, entonces el sistema no tiene solución. En caso contrario, continúe con el siguiente paso.
4. Con sustitución hacia atras resolvemos el sistema equivalente que corresponde a la matriz reducida por filas.

Ejemplo 1.1

Escribir el siguiente sistema en notación matricial, vectorial y resolverlo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Solución

Escribiremos este sistema en la notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando las columnas de la matriz A como vectores podemos escribir en notación vectorial el anterior sistema de la siguiente forma:

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la matriz ampliada del sistema

$$\left(A \mid \vec{b}\right)=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Escalonamos la matriz $\left(A \mid \vec{b}\right)$. Entonces

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1-F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{5} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 \end{array}\right)$$

Entonces obtenemos un sistema de ecuaciones equivalente an oroginal, en el sentido que tiene las mismas soluciones, y sus matrices son equivalentes.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 3z & = & -1 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

De la última fila obtenemos $z = 2$. Sustituimos este valor en la ecuación anterior y llegamos a que $y = 1$, y sustituyendo estos valores en la primer ecuación llegamos a $x = 1$.
Ahora es sencillo comprobar (sustituyendo en las tres ecuaciones del sistema) que el triple $(1,1,2)$ es la solución del sistema. Es decir, tenemos un sistema compatible determinado.

1.5. Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada por Gauss

En este apartado vamos a calcular la inversa de una matriz cuadrada utilizando el método de Gauss-Jordan. El criterio que se utiliza está basado en el siguiente hecho.

Teorema 1.3

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces

$$A \text{ tiene inversa sii } A \text{ es equivalente por filas a } I_n.$$

Por lo tanto, para saber si A tiene inversa podemos aplicar el método de Gauss-Jordan a la matriz A hasta llegar a la matriz identidad. Tenendo en cuenta esto podemos formular el siguiente algorítmo que nos permite calcular la inversa de una matriz A.

1. Construímos una matriz ampliada de la forma
$$(A \mid I_n)\,.$$
2. Por medio de operaciones elementales por filas, se lleva la matriz $(A \mid I_n)$ a una matriz en la forma escalonada *reducida* $(B \mid C)$.
   - Si $B = I_n$, entonces A admite inversa y su inversa es $A^{-1} = C$.
   - Si $B \neq I_n$, entonces A no admite inversa.

Ejemplo 1.1

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determinar si admite inversa.

Solución

Comenzamos con el algorítmo planteando la matriz 3×6 siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ecalonando llegamos a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$

Por lo tanto existe la inversa de A y es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

1.6. Teorema de Rouché-Frobenius

Ahora vamos a analizar las soluciones de sistema de ecuaciones lineales de acuerdo al rango de la matriz A y de la matriz ampliada $(A \mid b)$. Para ello enunciamos el Teorema de Rouché-Frobenius y algunas de sus consecuencias.

Primero recordemos que si tenemos una matriz de coeficientes reales A de tamaño $m \times n$, podemos mirar a las filas como vectores de $\mathbb{R}^n$. Los llamamos *vectores filas* de la matriz. De igual modo podemos mirar a las columnas como *vectores columna* de $\mathbb{R}^m$.

Recordemos que un sistema de ecuaciones lineales lo podemos escribir de dos maneras diferentes. Una matricial y otra vectorial. Por ejemplo, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & +4 & z & = & 3 \end{array} \right.$$

se puede escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

o vectorialmente como

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.4 (Teorema de Rouché-Frobenius)

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incognitas

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Sea $(A \mid \vec{b})$ su matriz ampliada. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible (tiene solución).
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \vec{b})$.

3. El vector columna $\vec{b}$ es combinación lineal de las columnas básicas de A (columnas que corresponden a los pivotes en una forma escalonada).

Corolario 1.1 Sea A una matriz $m \times n$ correspondiente al sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

1. Las siguientes condiciones son equivalentes:
   a) El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado (única solución)
   b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid \vec{b}) = n$.
2. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones) si y sólo si
$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid \vec{b}) < n.$$
3. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es incompatible (no tiene solución) si y sólo si $\text{rg}(A) < \text{rg}(A \mid \vec{b})$.

Para sistemas homogéneos podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.5

Sea $A\vec{x} = \vec{0}$ un sistema homogéneo. Entonces

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene como única solución la trivial si y solamente si $n = \text{rg}(A)$.
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ siempre tiene una solución no trivial si $m < n$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

Resumimos en el siguiente diagrama la compatibilidad de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ de acuerdo a la comparación entre el rango de la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $(A \mid b)$.

$$A\vec{x} = \vec{b} : \begin{cases} \textbf{Compatible}\ \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) & \begin{cases} \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) = n \ \text{única solución} \\ \\ \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) < n \ \text{infinitas soluciones} \end{cases} \\ \\ \textbf{Incompatibe}\,\text{rg}(A) < \text{rg}(A \mid b) \end{cases}$$

Ahora vamos a considerar una serie de ejemplos donde aplicaremos los resultados anteriores.

Ejemplo 1.1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y + z &= -1 \\ x + y + z &= 2 \\ 6x - 3y + 3z &= 2 \end{cases}$$

Solución

La idea es estudiar la matriz ampliada del sistema, escalonarla y de esa forma obtener un sistema equivalente. Notemos primero que el sistema puede ser escrito en cualquiera de las dos siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{forma matricial}$$

o

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{forma vectorial.}$$

Esta última notación es conveniente para comprender que el sistema tiene solución siiempre y cuando el vector $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores columnas $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Estudiemos la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_2-F_3]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

La segunda matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z &= -1 \\ -3y - z &= -5 \\ 0 &= -5 \end{cases}$$

Claramente este sistema *no* tiene solución pues hemos llegado a la contradicción $0 = -5$. Por lo tanto el conjunto solución del sistema es $S = \emptyset$. Es decir, sistema es incompatible.
Observemos que en este caso el rango de la matriz A *no* coincide con el rango de la matriz ampliada $(A \mid \vec{b})$ pues

$$2 = \text{rg}(A) \neq \text{rg}(A \mid b) = 3.$$

Ejemplo 1.2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 4 \end{cases}.$$

Solución

Consideremos la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

Escalonamos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{F_3-F_2\to F_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces obtenemos un sistema de ecuaciones equivalente al original

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

En este caso tenemos que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 2 < 4.$$

Luego este sistema es compatible indeterminado.
Es conveniente expresar la solución del sistema en términos de parámetros. Hay más de una forma de asignar parámetros, pero para hacerlo de una forma ordenada escribiremos a las variables que corresponden a los elementos *pivotes* en términos de las otras variables (que serán las variable libres). En este caso las variables x_1 y x_3 correspondientes a las columnas pivote en la matriz son las variables básicas. La otras variables, x_2 y x_4 son las variable libres.
Asignando los parámetros $x_2 = s$ y $x_4 = t$, nos quedan las ecuaciones:

$$x_1 - 2s + t = 2 \quad \text{and} \quad x_3 - 2t = 1,$$

o escrita en forma paramétrica

$$\left\{\begin{array}{ccl} x_1 & = & 2+2s-t \\ x_2 & = & s \\ x_3 & = & 1+2t \\ x_4 & = & t \end{array}\right. .$$

La solución puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2s-t \\ s \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o si se prefiere, se puede utilizar la notación vectorial más usual

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s\,(2,1,0,0) + t\,(-1,0,2,1) + (2,0,1,0).$$

El conjunto solución es

$$S = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = s\,(2,1,0,0) + t\,(-1,0,2,1) + (2,0,1,0)\right\}.$$

Notemos que el conjunto S corresponde a un hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que no pasa por el origen.

En un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminados se puede elegir *cualquier* variable como libre. Por orden y comodidad siempre seleccionaremos las variables libres de las columnas que no corresponden a los pivotes en la forma escalonada de la matriz del sistema.

Ahora analizamos el caso de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Si la matriz de coeficientes A del sistema tiene inversa, entonces al multiplicar ambos lados de la ecuación

$A\vec{x}=\vec{b}$ por A^{-1} obtenemos

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}\vec{x}=A^{-1}\vec{b},$$

es decir

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}.$$

Esto significa que el sistema tiene solución única. Entonces tenemos un método para resolver sistemas de n ecuaciones con n incognitas cuando existe la inversa de la matriz de los coeficientes.

Ejemplo 1.3

Determinar si el vector $v=(4,1,0)$ es combinación lineal de los vectores $v_1=(2,1,-1)$, $v_2=(1,0,2)$ y $v_3=(-1,3,-2)$.

Solución

Lo que nos piden es determinar si existen los escalares x,y,z tal que permitan escribir al vector v como combinación lineal de los vectores v_1,v_2 y v_3. Este ejemplo lo resolveremos de dos formas.
Primero planteamos la ecuación vectorial:

$$v=xv_1+yv_2+zv_3,$$

es decir

$$\begin{aligned}(4,1,0)&=x(2,1,-1)+y(1,0,2)+z(-1,3,-2)\\&=(2x,x,-x)+(y,0,2y)+(-z,3z,-2z)\\&=(2x+y-z,x+2z,-x+3y-2z).\end{aligned}$$

Igualando componente a componente obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-z&=&4\\x+2z&=&1\\-x+3y-2z&=&0\end{array}\right.$$

Observemos que podríamos haber escrito el sistema en notación matricial formando la matriz A donde las columnas son las traspuestas de los vectores v_1, v_2 y v_3:

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&2\\-1&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$$

Formamos la matriz ampliada y procedemos a escalonar la matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r}2&1&-1&4\\1&0&2&1\\-1&3&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_1+2F_3]{2F_1-F_2}\left(\begin{array}{rrr|r}2&1&-1&4\\0&1&3&2\\0&7&-5&4\end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{7F_2-2F_3}\left(\begin{array}{rrr|r}2&1&-1&4\\0&1&-5&2\\0&0&-30&10\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{10}F_3}\left(\begin{array}{rrr|r}2&1&-1&4\\0&1&-5&2\\0&0&-3&1\end{array}\right)$$

Entonces

$$\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A\mid b)=3=\text{cantidad de variables},$$

Por lo tanto el sistema es compatible determinado, es decir que tiene una única solución. Escribimso el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 4 \\ y-5z &= 2 \\ -3z &= 1 \end{cases}$$

De la última ecuación obtenemos $z=-\frac{1}{3}$. Sustituimos en la segunda y obtenemos $y=\frac{1}{3}$ y sustituimos en la primera ecuación y llegamos a $x=\frac{5}{3}$. Por lo tanto el conjunto solución es

$$S=\left\{(\frac{5}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3})\right\}.$$

En consecuencia, al existir solución, podemos afirmar que el vector v es combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3 pues existen escalares $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ y $z=-\frac{1}{3}$ tales que

$$(4,1,0)=(\frac{5}{3})(2,1,-1)+(\frac{1}{3})(1,0,2)+(-\frac{1}{3})(-1,3,-2).$$

La otra forma de resolver este ejemplo es calculando la inversa de la matriz de los coeficientes. Si A es la matriz de coeficientes y existe su inversa, entonces $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$. Entonces calculemos la inversa de A

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Luego

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Finalizamos este apartado con un teorema que recopila diferentes caracterizaciones de matrices inversibles y sistemas lineales homogéneos de orden n.

Teorema 1.6

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

1. A es inversible.
2. $\mathrm{rg}(A)=n$.
3. El sistema homogéneo $A\vec{x}=\vec{0}$ tiene una única solución (la trivial).
4. Todo vector $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores columna de A.
5. Para cada $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, la ecuación $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene una única solución.
6. El sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene solución, para cualquier $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.
7. A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

1.7. Estructura del conjunto de soluciones de un sistema consistente

Consideremos un sistema lineal

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

y el sistema homogéneo asociado

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

El propósito de esta sección es estudiar que existe una conexión entre las soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$ y las soluciones del sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.

Sea

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b} \right\}$$

el conjunto de *todas* las soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$ y sea

$$\mathrm{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0} \right\},$$

el conjunto de *todas* soluciones del sistema homogéneo.

Analicemos a través de un ejemplo la estrecha relación entre el conjunto S y el conjunto $\mathrm{N}(A)$.

Ejemplo 1.1

Estudiar el conjunto solución del siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rl} x+y-z & = 2 \\ -y+z & = 1 \\ 2x+y-z & = 5 \end{array} \right.$$

Solución

Lo escribimos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 2 < 3,$$

el sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos y obtenemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} z = y+1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

Luego

$$(x,y,z) = (3,y,y+1) = y(0,1,1) + (3,0,1).$$

Haciendo $y = t$ llegamos a que el conjunto solución del sistema es

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t\,(0,1,1) + (3,0,1) \right\}.$$

El conjunto corresponde a una recta que pasa por el punto $(3,0,1)$.

Consideremos ahora el sistema homogéneo asociado

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases}$$

Procedemos como en el caso no homogéneo y obtenemos como conjunto solución a

$$\mathrm{N}(A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t\,(0,1,1)\right\}.$$

Este conjunto corresponde a una recta que pasa por el origen y como tiene igual vector director que S, entonces las dos rectas son paralelas. Observamos que el punto

$$s_p = (3,0,1)$$

es una solución particular del sistema de ecuaciones lineales. Luego la solución general del sistema se obtiene conociendo la solución general del sistema homogéneo asociado más una solución particular del no homogéneo. Es decir

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t\,(0,1,1) + (3,0,1)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t\,(0,1,1)\right\} + (3,0,1) \\ &= \langle(0,1,1)\rangle + (3,0,1) = \mathrm{N}(A) + s_p. \end{aligned}$$

$$S = \mathrm{N}(A) + s_p.$$

Entonces la solución general del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ se obtiene como la suma de la solución general del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$

Si N es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto de todos los vectores de la forma $\vec{x}+\vec{v}$, con $\vec{x} \in N$ lo vamos a denotar por

$$N + \vec{v} = \{\vec{x}+\vec{v} : \vec{x} \in N\}.$$

Teorema 1.7

Supongamos $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales compatible. Entonces toda solución $\vec{y}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es la suma de una solución particular $\vec{s_p}$ del sistema más una solución $\vec{y_0}$ del sistema homogéneo asociado, es decir

$$\vec{y} = \vec{y_0} + s_p.$$

Por lo tanto el conjunto de todas las soluciones es

$$S = \mathrm{N}(A) + s_p.$$

Es importante destacar que las soluciones de un sistema consistente $A\vec{x} = \vec{b}$ se obtienen trasladando las soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ por medio de una solución particular $\vec{s_p}$ de $A\vec{x} = \vec{b}$.

N Consideremos un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ consistente. Por el Teorema 1.7, el conjunto de todas las soluciones de este sistema está dado por $S = \mathrm{N}(A) + s_p$, donde s_p es una solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$. En consecuencia

$$\begin{array}{cl} A\vec{x}=\vec{b} \text{ tiene una } \textbf{unica} \text{ solución} & \\ \Updownarrow & \\ N(A)=\left\{\vec{0}\right\} & \\ \Updownarrow & \\ A\vec{x}=\vec{0} \text{ tiene sólo la solución trivial.} & \\ \Updownarrow & \text{(por Teorema 1.6} \\ \operatorname{rg}(A)=n & \end{array}$$

Ⓝ

Analicemos geométricamente como son las soluciones de un sistema de ecuaciones Supongamos que tenemos en $\mathbb{R}^3$ un sistema compatible de 3 ecuaciones

$$A\vec{x}=\vec{b}.$$

Como el sistema es el sistema es compatible, entonces tiene solución y en consecuencia se nos presentan los siguientes casos:

1. Solución única. Es decir el conjunto solución

$$S=\{(a,b,c)\}$$

tiene un único punto de $\mathbb{R}^3$.

2. El conjunto solución S es infinito. Es decir, si el conjunto tiene dos puntos entonces podemos asegurar que tiene infinitos puntos. En este caso el conjunto solución puede ser de dos tipos:

Es una recta

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\vec{v}\right\},$$

o es un plano

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\vec{v}+\beta\vec{u}\right\}.$$

Ejemplo 1.1

Determinar un sistema de ecuaciones $A\vec{x}=\vec{b}$ tal que matriz A tal que su conjunto solución S sea

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(2,-3,1)+\alpha(1,-1,2)\right\}.$$

Solución

Sabemos que el conjunto solución de un sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ se determina conociendo la solución del homogéneo asociado $A\vec{x}=\vec{0}$ y una solución particular. en este caso el conjunto solución se puede escribir como

$$\begin{aligned} S&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(2,-3,1)+\alpha(1,-1,2)\right\}\\ &=\underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(1,-1,2)\right\}}_{\mathrm{N}(A)}+\underbrace{(2,-3,1)}_{S_p}.\end{aligned}$$

Entonces debemos hallar una matriz A tal que

$$\mathrm{N}(A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,-1,2)\right\}.$$

Claramente este conjunto es una recta que pasa por el origen. Entonces vamos a buscar las ecuaciones de esta recta como intersección de dos planos y de ahí podremos encontrar la matriz A.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \\ 2 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & x+y \\ 2 & 2x-z \end{pmatrix}$$

Luego las ecuaciones de la recta son

$$\begin{cases} x+y & = 0 \\ 2x-z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathrm{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : A\vec{x} = \vec{0}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,-1,2)\right\}.$$

Ahora nos queda determinar $\vec{b}$. Para esto vamos a utilizar la soución particular $s_p = (2,-3,1)^t$, pues $A\,s_p = \vec{b}$. Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3+1 \\ 4+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\vec{b} = (0,3)^t$ y en consecuencia el sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.8. Algunos ejercicios resueltos

En esta sección vamos algunos resolver ejercicios que intentan englobar a todo lo expuesto en este capítulo.

Ejemplo 1.2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Solución

En forma matricial este sistema se escribe como

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que cada ecuación corresponde a un plano. Por lo tanto estamos buscando si existe una intersección entre los 4 planos.
El primer paso es escalonar la matriz ampliada para obtener una forma escalonada por filas de la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2+3F_1 \\ F_3+2F_1 \\ F_4+F_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) F_4+F_2 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 13 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$5F_4 - 13F_3 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

El sistema inicial es equivalente al nuevo sistema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -x_1 - 2x_3 & = & 0 & \\ -2x_2 + 10x_3 & = & 2 & \\ 5x_3 & = & -1 & \\ \mathbf{0} & = & \mathbf{18} & \text{absurdo} \end{array}\right.$$

Pero claramente este sistema *no* tiene solución pues hemos llegado a la contradicción $0 = 18$. Por lo tanto el conjunto solución del sistema es $S = \emptyset$. Es decir, el sistema es *incompatible*.
Observemos que en este caso el rango de la matriz A *no* coincide con el rango de la matriz ampliada $(A \mid b)$ pues

$$2 = \mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A \mid b) = 3.$$

Ejemplo 1.3

Determinar el conjunto de todos los vectores solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales. Hallar el conjunto solución del sistema homogéneo asociado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & + & 3w & = & 4 \\ 2x & + & 4y & + & z & + & 3w & = & 5 \\ 3x & + & 6y & + & z & + & 4w & = & 7 \end{array}\right.$$

Solución

Primero escribimos el sistema en notación matricial

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a lo desarrollado anteriormente, determinar las soluciones del sistema es equivalente a determinar si el vector columna $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores columna de la matriz de los coeficientes A o lo que es lo mismo, debemos analizar el rango de A y de la matriz ampliada $(A \mid \vec{b})$. Entonces formamos la matriz aumentada y procedemos a escalonar

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Claramente el $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A \mid b)$. Por lo tanto el sistema es compatible. Como $2 = \text{rg}(A \mid b) < 4$, entonces el sistema es compatible indeterminado. Es decir, tendremos infinitas soluciones.
El sistema original es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+w & = & 2 \\ z+w & = & 1 \end{array} \right.$$

Las variables libres son y y w. Entonces llamando $y = t$ y $w = s$, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = 2-2t-s \\ y & = t \\ z & = 1-s \\ w & = s \end{array} \right.$$

Podemos escribir las soluciones como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o si queremos podemos escribir al conjunto solución del sistema

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = t(-2,1,0,0) + s(-1,0,-1,0) + (2,0,1,0) \right\}.$$

En este caso el vector

$$x_p = (2,0,1,0)$$

es una solución particular del sistema. El sistema homogéneo asociado tiene como conjunto solución

$$\text{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = t(-2,1,0,0) + s(-1,0,-1,0) \right\}.$$

Notemos que la solución general S es la solución general del homogéneo más una solución particular $x_p = (2,0,1,0)$ del sistema general.

Ejemplo 1.4

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+y+az & = & 1 \\ by+cz & = & c \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Determinar los siguientes conjuntos

1. $S_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \text{El sistema (1.5) tenga infinitas soluciones}\}$
2. $S_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \text{El sistema (1.5) tenga única solución}\}$
3. $S_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \text{El sistema (1.5) no tenga soluciones}\}$.

Primero escalonamos la matriz ampliada del sistema (1.5):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & b & c & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & b & c & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & c \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right).$$

Ahora comenzamos analizando los diferentes casos de a.
Si $a = 1$, entonces nos queda la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y obtenemos el sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ by+cz & = & c \end{array}\right.$$

Claramente en este caso tenemos infinitas solciones y por lo tanto $(1,b,c) \in S_1$.
Supongamos que $a \neq 1$. Entonces obtenemos el sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ by+cz & = & c \\ (a-1)z & = & 0 \end{array}\right.$$

de donde $z = 0$. Luego el sistema queda

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ by & = & c \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Entonces tenemos que analizar los diferentes casos con los elementos b y c.
Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, $y = \frac{c}{b}$ y por lo tanto $x+y = x+\frac{c}{b} = 1$, es decir, $x = 1-\frac{b}{c}$. En este caso tenemos una única solución

$$\begin{cases} x = 1-\frac{b}{c} \\ y = \frac{b}{c} \\ z = 0 \end{cases}$$

Es decir, $(a,b,c) \in S_2$, cuando $a \neq 1$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.
Si $b = 0$ y $c = 0$, entonces solo nos queda $x+y = 1$ y entonces tenemos infinitas soluciones. Luego $(a,0,0) \in S_1$.
Si $b = 0$, y $c \neq 0$, entonces $0y = c$, lo que no es posible. Por lo tanto, cuando $a \neq 1$, $b = 0$ y $c \neq 0$ el sistema no tiene solución, es decir, $(a,0,c) \in S_3$.

Ejemplo 1.5

Determinar si el vector $v = (1,3,-3)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (-1,-2,1)$, $v_3 = (-1,-1,-1)$ y $v_4 = (2,3,0)$.

Solución

El vector v es combinación lineal de los vectores v_1,v_2, v_3 y v_4 si y sólo si existen escalares x, y, z, w tales que

$$v = xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4.$$

Si escribimos los vectores como vectores fila tendremos lo siguiente

$$(1,3,-3) = x(1,2,-1) + y(-1,-2,1) + z(-1,-1,-1) + w(2,3,0). \tag{1.6}$$

Realizando las operaciones indicadas llegaremos al sisguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & + & 2w & = & 1 \\ 2x & - & 2y & - & z & - & 3 & = & 3 \\ -x & + & y & - & z & & & = & -3 \end{array} \right.$$

La otra alternativa es trabajar con la notación de columna. En este caso debemos escribir a los vectores como vectores columnas (considerando las traspuesta de los vectores filas). Utilizando la notación de vectores columna tenemos la siguiente identidad

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Tanto la escritura (1.6) o la escritura (1.7) son correctas, pero debemos tener cuidado. En cualquier caso el sistema asociado es el mismo.
Consideramos la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

y escalonamos la misma

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obtenemos un sistema equivalente al inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & + & 2w & = & 1 \\ & & & & z & - & w & = & 1 \end{array} \right.$$

Las variables pivotes están ubicadas en la primer y tercer fila, es decir, x y z. Por lo tanto las variables y y w son las variables independientes. Como $z = w + 1$, sustituimos en la primer ecuación y obtenemos $x - y - z + 2w = x - y - w - 1 + 2w = x - y - 1 + w = 1$, de donde $x = y - w + 2$. Asignando los parámetros $y = t$ y $w = s$ obtenemos la identidad

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Notemos que la solución anterior la hemos escrito utilizando la notación de vectores como vectores columna. Si queremos también podemos utilizar la notación más usual de escribir los vectores como vectores filas. En este caso podemos escribir

$$(x,y,z,w) = (2,0,1,0)+t(1,1,0,0)+s(-1,0,1,1).$$

En cualquier caso podemos afirmar que el vector $v = (1,3,-3)$ es combinación lineal de v_1, v_2, v_3, y v_4, pues por ejemplo si damos los valores

$$\{t = 1,\ s = 1$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podríamos elegir otros valores, como por ejemplo $t = 1$ y $s = -1$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo anterior respondimos a la pregunta de cuando un determinado vector es combinación lineal de un conjunto de vectores. Ahora vamos a generalizar la situación y no vamos a concentrarnos en un vector particular. Vamos a tratar de averiguar que condiciones generales debe cumplir un vector para ser combinación lineal de un conjunto de vectores.

Ejemplo 1.6

Determinar que las condiciones que debe satisfacer un vector $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ para ser combinación lineal de los vectores $v_1 = (1,0,1,2)$, $v_2 = (1,1,1,1)$, y $v_3 = (2,1,1,2)$.

Solución

Para resolver este ejercicio formamos un sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Formamos la matriz ampliada y la escalonamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \\ 2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3-b_1 \\ 0 & -1 & -2 & b_4-2b_1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2-b_3+b_4 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones tiene solución si y sólo si se cumple la ecuación

$$-b_1+b_2-b_3+b_4=0.$$

Esto es, el vector (b_1,b_2,b_3,b_4) es combinación lineal de los vectores v_1, v_2, y v_3 si y sólo si se satisface la anterior ecuación, que corresponde a un hiperplano. Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es el conjunto

$$S=\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\left\{(b_1,b_2,b_3,b_4)\in\mathbb{R}^4 : -b_1+b_2-b_3+b_4=0\right\}.$$

1.9. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Determinar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que satisfacen las condiciones indicadas

1. $AX + B = BX + A$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $3X + A^t = (X^tA)^t$, donde recordemos que A^t es la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 1.2. Recordemos que el ***rango*** de una matriz A es el número de filas no nulas en cualquier forma escalonada por filas.

1. Determinar el rango de las siguientes matrices

$$(a) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Analizar el rango según los valores de α

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3. Escribir los siguientes sistemas en notación matricial y vectorial. Estudie la compatibilidad de los mismos sistemas y resuelva en los casos posibles. Determine e identifique el conjunto solución.

$$(1) \begin{cases} 2x + y - 3z &= 5 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ 5x - 3y - z &= 16 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 5 \\ 8x_1 - 9x_2 + 15x_3 &= 16 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + 4z &= 2 \\ 2x + 5y + 20z &= 10 \\ -x + 2y + 8z &= 4 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} 3x - y &= 6 \\ 2x + y - z + 3t &= 4 \\ x + 3y - 2z + 6t &= 2 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 3x + 2y - t &= 5 \\ x - z + 2t &= 1 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x + y + z + w &= 0 \\ x + w &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.4. Dadas las matrices siguientes, resolver los sistemas homogéneos asociados. En los casos posibles determinar si las matrices tienen inversa y calcularlas utilizando el método de Gauss.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -`1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5. Determinar todos los valores de a para los que el sistema lineal resultante sea compatible, compatible determinado o incompatible

$$(1) \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y &= 2 \\ y + z &= 2 \\ ax + by + cz &= 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x - y + z + t &= 2 \\ x + 2y - z + 4t &= 3 \\ x + 7y - 4z + 11t &= a \end{cases}$$

Ejercicio 1.6. Consideremos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

1. $x = (2,0,-1)^t$ es solución.
2. $x = (-7,2,2)^t$ es solución.
3. A es inversible.
4. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 1.7. Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

1. Determinar el valor de a para que el rango de la matriz sea 2.
2. Para el valor $a = 1$, determinar la solución del sistema homogéneo asociado.

Ejercicio 1.8. Dada la matriz A y la matriz $\vec{b}$, hallar el valor de α para que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ sea compatible. Resolver el sistema para alguno de los valores hallados

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha - 3 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\vec{x} \in \mathrm{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0} \right\}$ y $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.10. Hallar las condiciones para que un vector arbitrario v cumpla las siguientes condiciones

1. Que sea normal al hiperplano de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,1,1),(1,2,1,2)$, y $(1,3,2,4)$.
2. Que pertenezca al plano hiperplano $S = \langle (1,0,1,1),(0,1,1,2),(1,1,1,0) \rangle$.
3. Que pertenezca al hiperplano generado por los vectores $(1,2,3)$, $(-1,0,-2),(1,-2,1)$.

Ejercicio 1.11. En cada apartado determinar si cada uno de los vectores es combinación de los vectores columna de las matriz dada. Luego estudiar si es posible una condición general que asegure que un vector genérico $\vec{b}$ es combinación lineal de los vectores columna de la matriz A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $v_1 = (2,-1,0)$, $v_2 = (-1,0,1)$.

Ejercicio 1.12. Hallar la solución general de cada sistema $A\vec{x}=\vec{b}$,conociendo la solución particular indicada.

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, s=(-2,1,0) \quad (2)\ A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, s=(1,2,3).$$

Ejercicio 1.13. Dado el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, y $\vec{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$.

1. ¿Para que valores de k el sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o no existen soluciones ?
2. Determine el conjunto S solución del sistema general y el conjunto solución $\mathrm{N}(A)$ del sistema homogéneo $A\vec{x}=\vec{0}$.

Ejercicio 1.14. Hallar los valores de a y b para que el sistema de ecuaciones que tiene como matriz ampliada a la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ tenga como conjunto solución una recta.

Ejercicio 1.15. Dada la matriz A y la matriz columna $\vec{b}$, en cada caso:

1. Determinar $\mathrm{rg}(A)$, A^{-1} y $\mathrm{rg}(A)$.
2. Usar el ítem anterior para resolver el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$.
3. Utilice el ítem anterior para expresar al vector $\vec{b}$ como combinación lineal de las columnas de A.

$$(a)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.16. Determinar un sistema de ecuaciones $A\vec{x}=\vec{b}$ tal que su conjunto solución sea el conjunto indicado

1. $\pi_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)=s(-1,2,1)+t(2,-4,-2)\right\}$.
2. $\pi_2=\langle(-1,0,1),(0,1,2)\rangle+(1,2,2)$.
3. $\pi_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)=(1,2,3)+s(1,-2,-2)+t(2,0,-1)\right\}$

2 Determinantes

Ahora veremos como asociar a cada matriz cuadrada un número llamado el *determinante* de la matriz. Los determinantes surgieron en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, como veremos más adelante.

Antes de entrar en una definición formal, veamos algunos casos particulares. Supongamos que tenemos una matriz cuadrada de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Su determinante es el número

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

También podemos simbolizar al determinante de una matriz A como $|A|$.

Para una matriz de orden 3 como la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

su determinante se puede calcular de la siguiente forma. Elegimos una fila. Multiplicamos cada elemento de la fila por el determinante que resulta de eliminar la fila y la columna donde está ubicado. Sumamos o restamos en forma alternada todas la posibles elecciones para la fila elegida. Por ejemplo, si elegimos la primer fila el determinante nos quedará

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Más adelante daremos la noción de cofactores y podremos calcular el determinante de matrices de cualquier orden n.

Ejemplo 2.1

Calculemos el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 2(6+6) - (-4)(6+2) + 0$$
$$= 24 + 32 = 56$$

Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un método que permite calcular determinantes de matrices de orden 3 únicamente. Consideremos una matriz una matriz de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Formamos un determinante agregando al final de la matriz A las dos primeras filas. El determinante se calcula sumando los productos indicados en negrita que van de izquierda a derecha y restando los productos indicados en negrita en otro arreglo que van de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{23} + a_{31}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{33}a_{22}$$

Por ejemplo, calculemos el determinante de la matriz del ejemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2{,}3{,}2 + (-4)(-1)2 + 360 - 032 - (-1)62 - 3(-4)2$$
$$= 12 + 8 + 0 - 0 + 12 + 24 = 56.$$

2.0.1. Cálculo del determinante por medio de cofactores

Para calcular el determinante de matrices de orden $n \geq 3$ vamos a introducir el concepto de menores y cofactores.

Definición 2.1

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

- El *menor* asociado al lugar ij es la matriz M_{ij} que se obtiene eliminar de A la fila i y la columna j.
- El *cofactor* C_{ij} del elemento a_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante del menor M_{ij} es decir:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}.$$

Ejemplo 2.2

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores M_{21} y M_{32} de la matriz A son

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ylos respectivos cofactores son

$$\begin{aligned} C_{21} &= (-1)^{2+1} \det M_{21} = (-1) \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-8) = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{32} &= (-1)^{3+2} \det M_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-2) = 2. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular el determinante de una matriz cuadrada utilizando los cofactores de cualquier fila o cualquier columna. Cualquier desarrollo que elijamos es lo mismo.

Consideremos una matriz de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definición 2.2

El **determinante** de A por la fila i es el número real

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

Se puede comprobar que para calcular el determinante se puede utilizar cualquier fila i. Tamién se puede demostrar que el determinante de A se puede calcular desarrollando por una columna j arbitraria. Es decir, tomando la fila j, tenemos que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{2n}C_{2n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

Ejemplo 2.3

Calcular el determinante de la siguiente matriz eligiendo primero una fila y después una columna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución

Para realizar el cálculo del determinante es conveniente elegir las filas o columnas que más ceros tengan. Si hacemos el cálculo por fila es conveniente elegir la segunda fila. Recordemos que cada cofactor tiene asociado un signo. Entonces el determinante es

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= 4\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -4\,(-6+1) + 2\,(4-1) + 0 = 20 + 6 = 26. \end{aligned}$$

Ahora hagamos el desarrollo elegiendo una columna. En este caso elegimos las última columna.

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{31}C_{31} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \\ &= 1\,(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-4-2) + 0 + 2\,(4+12) = -6 + 32 = 26. \end{aligned}$$

Existen algunos casos en donde el determinante es muy sencillo de calcular.

- Si tenemos una matriz triangular (superior o inferior)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

  Es decir, el determinante de una matriz triangulares el producto de los elementos de la diagonal principal.

2.0.2. Propiedades de los determinantes

En muchos casos al intentar calcular determinantes es conveniente simplificarlos y reducirlos a otros de dimension menor. Para ello debemos conocer las siguientes propiedades de los determinantes. Las demostraciones quedan como ejercicio.

Lema 2.1 Sean A y B matrices de orden n. Entonces

1. $\det(A) = \det(A^t)$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3. $\det(A^k) = \det(A)^k$.

4. $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Consideremos una matriz de orden n. Escribamos a esta matriz utilizando sus columnas, es decir escribimos a la matriz A como

$$A = (A_1 \ldots A_i \ldots A_n),$$

donde A_i es la columna que está ubicada en el lugar i.

Como el $\det(A) = \det(A^t)$, entonces todo las propiedades que enunciemos para A utilizando filas son válidas también si utilizamos columnas.

Lema 2.2 Sea A una matriz de orden n.

1. Un escalar que multiplique a toda una fila (o columna) puede extraerse del determinante. Es decir

$$\det(A_1 \ldots kA_i \ldots A_n) = k \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_n)$$

2. Si una fila o columna contiene únicamente ceros, el determinante es nulo.

$$\det(A_1 \ldots \mathbf{0} \ldots A_n) = 0.$$

3. Si una matriz tiene dos columnas (filas) iguales, su determinante es cero.

$$\text{Si } A_i = A_j, \text{ entonces } \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_i \ldots A_n) = 0.$$

4. Si a una columna (o fila) le sumamos otra multiplicada por un numero, el determinante no cambia

$$\begin{aligned} \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_i + kA_j \ldots A_n) &= \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_j \ldots A_n) + \underbrace{\det(A_1 \ldots A_j \ldots kA_j \ldots A_n)}_{0} \\ &= \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_j \ldots A_n). \end{aligned}$$

5. Si intercambiamos dos columnas (o filas) el determinante cambia de signo.

$$\det(A_1 \ldots A_i \ldots A_j \ldots A_n) = -\det(A_1 \ldots A_j \ldots A_i \ldots A_n).$$

6. Si la matriz es triangular o diagonal, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Las propiedades anteriores, en particular la propiedad 4, es muy útil para calcular determinantes. Dado una matriz A se intenta diagonalizar la matriz. Como el determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas diagonales, entonces el determinante de la matriz diagonalizada es igual al determinante de la matriz original.

Ejemplo 2.4

Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizamos la matriz A:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Intercambiamos la fila 2 por la 3 . Por la propiedad 5 del Lema 2.0.2 se invierte el signo del determinante

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = -50.$$

Ejemplo 2.5

Calcular los determinantes de las siguientes matrices utilizando las propiedades anteriores.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En este caso para simplificar los cáculos, podemos sumas las dos primeras filas

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^{2+1} 0. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2(-1-1) = 4.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$. Notemos que esta matriz tiene una fila de ceros. Entonces 2 del Lema 2.0.2 sabemos que el valor del determinante de A es cero.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. El determinante $|A|$ corresponde a una matriz triangular inferior. Por la propiedad 6 del Lema 2.0.2, el determinante es el producto de los elementos que están en la diagonal. Es decir $\det(A) = 2(-2)(-7) = 28$.

Ejemplo 2.6

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que $\det(A) = 7$, calcular el determinante $\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 4a_{11} - a_{21} & 4a_{12} - a_{22} & 4a_{13} - a_{23} \\ 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \end{vmatrix}$.

Indicamos en cada símbolo de igualdad las propiedad aplicada.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 4a_{11} - a_{21} & 4a_{12} - a_{22} & 4a_{13} - a_{23} \\ 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \end{vmatrix} &\overset{1}{=} 3 \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 4a_{11} - a_{21} & 4a_{12} - a_{22} & 4a_{13} - a_{13} \\ & & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \\
&\overset{5}{=} -3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{11} - a_{21} & 4a_{12} - a_{22} & 4a_{13} \\ & & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\overset{4}{=} -3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (-3)7
\end{aligned}$$

Lema 2.3 Sea $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ una matriz, donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son las columnas de la matriz A. Si C_i es una una columna de A y se puede expresar como $C_i = D_1 + D_2$, entonces el determinante de A se puede descomponer en la siguiente forma

$$\det(C_1, \ldots, D_1 + D_2, \ldots C_n) = \det(C_1, \ldots, D_1, \ldots C_n) + \det(C_1, \ldots, D_2, \ldots C_n).$$

2.0.3. Determinante de una matriz inversa

Recordemos que una matriz cuadrada A tiene inversa si existe una matriz del mismo tamaño B tal que

$$AB = I.$$

Si A tiene inversa, esta es única y la denotamos por A^{-1}. Luego, por la propiedad del producto de matrices tenemos que

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Por lo tanto, si $\det(A) \neq 0$, tenemos la siguiente fórmula para calcular el determinante de la matriz inversa

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.}$$

En realidad, es posible probar el siguiente resultado.

Teorema 2.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces

$$A \text{ es inversible si y sólo si } \det(A) \neq 0.$$

Ejemplo 2.1

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa pues $\det(A) = 17$. En cambio la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa pues $\det(B) = 0$.

Ejemplo 2.2

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\det(A) = 3$, calcular $\det(A^{-1})$, $\det(3A)$, $\det(A^2)$, $\det((2A)^{-1})$, y $\det(2A^1)$.

Solución

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \frac{1}{3}$.
- $\det(3A) = 3^3 \det(A) = 27{,}3 = 81$.
- $\det(A^2) = \det(A)^2 = 3^2 = 9$.
- $\det((2A)^{-1}) = \dfrac{1}{\det(2A)} = \dfrac{1}{2^3 \det(A)} = \dfrac{1}{8\,3} = \dfrac{1}{24}$.
- $\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = \dfrac{2^3}{\det(A)} = \dfrac{8}{3}$.

Ejemplo 2.3

Sabiendo que $\det(A) = 2$ y que $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ calcular $\det(A^3 B - A^3)$.

Solución

Primero observemos que

$$A^3 B - A^3 = A^3 (B - I),$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^3$. Luego

$$\det(A^3 (B - I)) = \det(A^3) \det(B - I) = \det(A)^3 \det(B - I) = 8 \det(B - I).$$

Calculemos entonces $B - I$ y después su determinante de $B - I$:

$$B - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $B-I$ es una matriz diagonal superior, entonces el determinante es el producto de la diagonal, es decir

$$\det(B-I) = 2.(-4).(-2) = 16.$$

Por lo tanto

$$\det(A^3(B-I)) = 8{,}16 = 128.$$

Ejemplo 2.4

Sean $A,B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\det(A) = -2$ y $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcular $\det(B^3)$ y $\det(-3B)$ y $\det((-2B)^{-1})$.

Solución

Calculamos primero $\det(AB)$:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8-4 = -12.$$

Teniendo en cuenta que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, obtenemos

$$-12 = (-2)\det(B),$$

es decir $\det(B) = 6$. Luego

$$\det(-3B) = (-3)^3 \det(B) = -27{,}6$$

Ahora podemos calcular el determinante de la inversa

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \frac{1}{6}.$$

Finalmente

$$\det((-2B)^{-1}) = \frac{1}{\det(-2B)} = \frac{1}{(-2)^3\det(B)} = \frac{1}{-8{,}6} = -\frac{1}{48}.$$

Ejemplo 2.5

Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que las siguiente matriz sea inversible.

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 0 & k-2 & 3 \\ k+1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución

Debemos calcular el determinante de A y buscamos los valores donde el determinante se anule. En este caso nos conviene desarrollar el determinante por la primera columna o por la segunda fila. Si elegimos la fila tenemos que

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 0 & k-2 & 3 \\ k+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+1}0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(k-2) \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ k+1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}3 \begin{vmatrix} k+1 & -1 \\ k+1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (k-2)(-2k-2-k-1) - 3(2k+2-k-1) \\
&= (k-2)(-3k-3) - 3(k+1) = (-3)(k-2)(k+1) - 3(k+1) \\
&= (k+1)((-3)(k-2)-3) = (k+1)(-3k+6-3) = (k+1)(-3k+3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\det(A) = 0 \text{ sii } k = -1 \text{ o } k = 1.$$

2.0.4. Matriz adjunta. Cálculo de la inversa de una matriz

Sabemos que una matriz cuadrada de orden n tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero. No es difícil calcular la inversa de una matriz de 2×2 o 3×3. Ahora veremos una otra forma de calcular la inversa para lo cual utilizaremos la noción de cofactores.

Recordemos que el cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} de una matriz A de tamaño $m \times n$ es

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

Definición 2.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La matriz de *cofactores* de A es la matriz que se obtiene sustituyendo cada elemento de la matriz A por su respectivo cofactor. La matriz de los cofactores se simboliza por $\text{cof}(A)$.
La matriz *adjunta* de A es la traspuesta de la matriz de los cofactores de A. La adjunta se simboliza por $\text{adj}(A)$.

Ejemplo 2.6

Determinar la matriz adjunta de una matriz 2×2.
Consideremos una matriz de orden 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Primero determinamos los cofactores de cada elemento

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (-1)^{1+1} a_{22} &= a_{22} \\
C_{12} &= (-1)^{1+2} a_{21} &= -a_{21} \\
C_{21} &= (-1)^{1+2} a_{12} &= -a_{12} \\
C_{22} &= (-1)^{2+2} a_{11} &= a_{11}.
\end{aligned}$$

Entonces la matriz de los cofactores de A es

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

y la *adjunta* de A es

$$\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^t = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos una matriz cuadrada A de orden n. Supongamos que $\det(A) \neq 0$. Queremos determinar la matriz A^{-1}. Enunciamos el siguientye resultado sin demostración.

Lema 2.1 Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces se cumple que

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)\,A$$

y

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,I_n.$$

Lema 2.2 Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}.$$

Ejemplo 2.7

Hallar la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede calcular que $\det(A) = 4$. Por lo tanto A tiene inversa. Determinemos los cofactores

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

Por lo tanto la matriz de cofactores de A es

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la adjunta es

$$\mathrm{cof}(A)^t = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la inversa es

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{cof}(A)^t}{\det(A)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -10 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2.0.5. Sistemas de ecuaciones lineales y determinantes

Ahora veremos una aplicación muy útil para determinar las soluciones de una ecuación matricial de la forma

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n, $\vec{x}$ es la matriz de las incognitas y $\vec{b}$ es la matriz de los términos independientes.

1. Supongamos que $\det A \neq 0$. Entonces existe la matriz A^{-1}. Por lo tanto, multiplicando la igualdad $A\vec{x} = \vec{b}$ por A^{-1} obtenemos

$$\begin{aligned} A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b}. \end{aligned}$$

   Como la inversa de una matriz es única, entonces el sistema $AX = B$ tiene una única solución dada por $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

2. Si $\det A = 0$, no existe la inversa y no podemos buscar la solución del sistema con en el punto anterior. En este caso tenemos dos posibilidades. Si el sistema es homogéneo, es decir $\vec{b} = 0$, entonces hay infinitas soluciones. Si $\vec{b} \neq 0$, entonces puede ser compatible indeterminado (infinitas soluciones), o incompatible.

En el siguiente diagrama resumimos las distintas posibilidades que se pueden presentar en un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones con n incognitas:

$$A\vec{x} = \vec{b} \begin{cases} \det A \neq 0 \, \text{solución única } \vec{x} = A^{-1}B & . \\ \det A = 0 \begin{cases} \vec{b} = \vec{0} & \text{sistema homogéneo con infinitas soluciones} \\ \vec{b} \neq \vec{0} & \begin{cases} \text{infinitas soluciones} \\ \text{o} \\ \text{incompatible (sin solución)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo 2.8

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos aplicando Gauss, debemos escalonar la matriz ampliada y estudiar su rango. La otra posibilidad es calcular el determinante de la matriz A. Si es distinto de cero entonces el sistema tiene solución y viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculemos el determinante de la matriz de los coeficientes. En este caso podemos aplicar la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3-2+4-3-2-4 = -10.$$

La otra forma de calcular el determinante es utilizar los cofactores

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -1\cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -5-6+1 = -10 \end{aligned}$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es distinta de cero, entonces el sistema tiene solución, y además es única. Ahora deberemos calcular la inversa de la matriz de los coeficientes. Podemos aplicar Gauss o el método de los cofactores. En este caso aplicamos Gauss. Entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Primero pasamos a la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{2}{5} & \dfrac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{2}{5} & \dfrac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.9

Analizar, utilizando determinantes, el valor del parámetro para que el siguiente sistema sea compatible. Analizar el caso del sistema homogéneo asociado.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \alpha x & - & 3y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 2 \end{array} \right.$$

Escribimos el sistema en notación matricial $AX = B$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Analizamos el determinante de la matriz de los coeficientes A

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha + 6.$$

Entonces tenemos los siguientes casos

1. Si $|A| \neq 0$, es decir, si $\alpha \neq 6$. En este caso existe la matriz inversa A^{-1} y el sistema tiene única solución dada por
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Si $|A| = 0$, es decir, si $\alpha = 6$, entonces
$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 6x & - & 3y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 2 \end{array} \right.$$
Es claro que este sistema es incompatible.

Ahora que conocemos calcular si una matriz cuadrada tiene inversa a través su determinante, podemos extender el Teorema 1.6 referido a cuando un sistema de n ecuaciones con n incognitas tiene solución.

Teorema 2.2

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. A es inversible.
2. $\operatorname{rg}(A) = n$.
3. $\det(A) \neq 0$.
4. El sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene una única solución (la trivial).
5. Todo vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores columna de A.
6. Para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una única solución.
7. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución, para cualquier $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
8. A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

2.0.6. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Sea $A = (C_1\, C_2\, C_3)$ una matriz donde C_1, C_2 y C_3 son las columnas de A. Dada la matriz $B = (C_1 - 3C^3\, A_3\, A_2)$, calcular $\det(\frac{3}{2}A^t B^{-1})$, sabiendo que $\det(A) = 2$.

Ejercicio 2.2. Supongamos que

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4,$$

Calcular, aplicando propiedades de determinantes, los determinantes de las siguientes matrices

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3+2b_1 & 3+2b_2 & 3+2b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.3. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

1. Si $\det(A) = 4$ y $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\det(B^2)$ y $\det(-2B)$ y $\det((-3B)^{-1})$.

2. Si $\det(A) = 3$ y $\det(B) = 4$,calcular $\det(AB^t)$.

Ejercicio 2.4. Calcular los determinantes de las siguientes matrices

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.5. Calcular los siguientes determinantes. Determine para que valor de α los determinantes se anulan.

$$(a) \begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha-2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} \alpha-1 & 2 & 2 \\ 3 & \alpha-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.6. El polinomio característico de una matriz cuadrada A de orden n es el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Para cada una de las siguientes matrices calcular su polinomio característico y, en los casos posibles, sus raices.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -2 & -4 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.7. Utilizando determinantes, hallar condiciones para que las siguientes matrices sean inversibles.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ k & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k-1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

$$(d)\ (A^t - \alpha I), \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.8. Para cada una de las siguientes matrices calcular si es posible la matriz inversa por el método de Gauss y por el método de los cofactores.

$$(a) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad a \dot{\neq} 0$$

Ejercicio 2.9. Determinar utilizando determinantes, los valores de los parámetros para los cuales los siguientes sistemas lineales $A\vec{x} = B$ son compatibles. Estudiar los casos cuando $\det A = 0$ y $B = 0$, $\det A = 0$ y $B \neq 0$.

$$(a)\left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & ky & = & 0 \\ kx & + & y & = & 1 \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & 7y & + & \alpha z & = & 3 \end{array}\right.$$