1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales.

1. $\{(4,2,-5),(-1,2,0),(2,1,2)\}$.
2. $\{(3,1,-1),(-1,2,1),(2,-2,4)\}$.

Ejercicio 1.2. Estudie si los siguientes conjuntos de vectores forman una base ortogonal. Luego utilice el Teorema 1.1 para expresar al vector w como una combinación lineal de los vectores de la base. Halle el vector de coordenadas $[w]_B$ de w con respecto a la base. Determine si las bases son ortonormales. En caso de que no lo sean normalice los vectores para formar una base ortonormal.

1. $v_1=(4,-2)$, $v_2=(1,2)$, $w=(1,3)$.
2. $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(1,2,1)$, $v_3=(1,-1,1)$ y $w=(1,1,1)$.

Ejercicio 1.3. Hallar bases ortogonales y ortonormales de los siguientes subespacios y las coordenadas del vector w en dichas bases

1. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+3y-z=0\right\}$, $w=(-1,2,5)$.
2. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=\alpha,\, y=-\alpha,\, z=3\alpha\right\}$, $w=(1,-,3)$

Ejercicio 1.4. Determinar las proyecciones de los siguientes vectores en las direcciones dadas:

1. El vector $u=(2,3)$ en la dirección de $v=(1,4)$.
2. El vector $u=(1,2,3)$ en la dirección de $v=(1,1,-1)$.
3. El vector $u=(-1,1,2)$ en la dirección de la recta $r:\begin{cases}2x-y+3z & =0\\ x+y+z & =0\end{cases}$

Ejercicio 1.5. Determine la proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio S generado por los vectores que se indican.

1. $v=(3,1,-2)$, $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,-1,0)$.
2. $v=(3,-2,4,-3)$, $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(1,-1,-1,1)$, $u_3=(0,0,1,1)$.

Ejercicio 1.6. En los siguientes apartados se da un subespacio S y un vector v. Hallar el complemento ortogonal $S^{\perp}$. Luego calcular la proyección del vector v sobre el subespacio S, y sobre el espacio $S^{\perp}$. Escriba a v como suma de un vector $v_1\in S$ y otro $v_2\in S^{\perp}$.

1. $S=\langle(1,2,1),(1,1,1)\rangle$.
2. $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\right\}$, $v=(-1,2)$.
3. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+2z\right\}$, $v=(3,-1,2)$.
4. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}$, $v=(2,1,1)$.
5. $S=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0\right\}$, $v=(1,1,1,1)$.

Ejercicio 1.7. En los siguientes casos hallar la matriz de proyección y calcular proyección del vector v sobre el subespacio S.

1. $v=(1,2,3)$, $S=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}$.
2. $v=(1,2,1)$, $S=\left\{x;y;z)\in\mathbb{R}^3 : x-y-z=0\right\}$.
3. $v=(4,1,3,4)$, $S=\langle(1,1,1,1),(1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle$.

Ejercicio 1.8. Determinar la distancia del punto a la recta y la proyección del punto a la recta en los siguientes casos

1. Punto $P = (-2,0,1)$ y la recta $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{3} = z+1$.

2. Punto $P = (2,-1,3)$ y recta $r : \begin{cases} x-y+2z & = 1 \\ -x+2y-z & = 2 \end{cases}$.

Ejercicio 1.9. Determinar la proyección ortogonal de la recta $r : (x,y,z) = (1,1,-1) + \alpha(1,2,1)$ sobre el plano $\pi : 2x - y + z = 2$.

Ejercicio 1.10. Dada la recta $r : (x,y,z) = (1,1,0) + \alpha(a,-2,b)$, hallar los valores de a y b para que la proyección de r sobre el plano $\pi : -x+4y+z = -2$ sea un punto. ¿Cuál es dicho punto?

Ejercicio 1.11. Determinar la proyección del punto $P = (1,1,-1)$ sobre la recta $r : \begin{cases} 2x+y-z & = 1 \\ x-y+z & = 0 \end{cases}$.

Ejercicio 1.12. Determinar la proyección del punto $P = (-1,2,2)$ sobre el plano $x - y + z = 2$.

Ejercicio 1.13. Consideremos la recta r definida como

$$r : \begin{cases} x-y-z = 1 \\ y - cz = 0 \end{cases}$$

y el plano

$$\pi : x + y = 0.$$

1. Determinar $c \in \mathbb{R}$ para que la recta r sea paralela al plano π.

2. Para el valor c encontrado, hallar la proyección de la recta r sobre el plano π. Al resolver el problema realizar un esquema gráfico de la situación.

Ejercicio 1.14. Usar Gram-Schmidt (GS) para hallar una base ortonormal de los siguientes subespacios:

1. $S = \langle (1,0,0),(2,1,0),(3,1,1) \rangle$.

2. $S = \langle (1,0,1,0),(2,1,0,1),(0,1,2,3) \rangle$.

3. $S = \langle (1,2,0,2),(2,4,1,4),(1,3,1,1) \rangle$.

Ejercicio 1.15. En cada ítem, determinar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores indicados:

1. $v = (1,2,3)$

2. $v = (3,5,1)$.