1.8. EJERCICIOS

Ejercicio 1.1. Determinar cuales de las siguientes funciones son transformaciones lineales

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=(y,x)$.
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(x,y,0)+(1,0,0)$.
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=xy$.
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(2x-y,x)$.

Ejercicio 1.2. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $f(1,2,1)=(1,2)$ y $f(2,1,1)=(3,0)$. Hallar $f(2(2,1,1))$, $f(3,6,3)$ y $f(1,-1,0)$.

Ejercicio 1.3. Mostrar que las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales, verificando las propiedades y hallando luego la matriz estandar de cada transformación lineal.

1. $T(x,y,z)=(x+y,x-y)$.
2. $T(x,y)=(x,2x+y,x+3y)$.
3. $T(x,y,z)=(x-y+z,x+2y-3z)$.

Ejercicio 1.4. Para cada transformación lineal, hallar las imágenes y preimágenes de los indicadas en cada apartado.

1. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(x-2y+z,y+z)$. Hallar $T(S)$ y $T^{-1}(H)$, donde $S=\langle(1,-3,2)\rangle$ y $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2x-y=0\right\}$.
2. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, con $A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$. Hallar $T_A\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $T_A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $T_A^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$, $T(S)$, $T^{-1}(H)$, donde
$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+3y=0\right\}$$
y
$$H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)=\lambda(2,-3)\right\}.$$
.
3. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ donde $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\\-2&2\end{pmatrix}$. Hallar $T_A(2,4)$,y $T_A^{-1}(-1,2,2)$.

   Explicar por qué el vector $(1,1,1)$ no tiene preimagen bajo esta transformación.
4. Sea $t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por
$$t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$
   Determinar $t(S)$ y una base, donde $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(1,2,3)\right\}$. Hallar $t^{-1}(H)$ y $t^{-1}(D)$, donde $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(1,2,-1)+\beta(0,-1,-1)\right\}$ y $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(0,-1,-1)\right\}$.

Ejercicio 1.5. Analice la existencia y unicidad de una transformación lineal T que cumpla las condiciones indicadas. En los casos posibles determine la expresión analítica de la transformación y la matriz estandar.

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(v_1)=(1,-3)$ y $T(v_2)=(1,5)$, para

a) $v_1 = (-1,2)$ y $v_2 = (0,-1)$.
b) $v_1 = (1,-3)$ y $v_2 = (-2,6)$.

2. $T(1,1,1) = (1,0,0), T(0,-1,1) = (-1,2,1)$ y $T(1,0,1) = (1,1,0)$. Determinar $T(0,3,-1)$ y $T(2,-1,0)$.

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v_1) = (1,1,1)$, $T(v_2) = (0,-1,3)$ y $T(v_3) = (2,5,-7)$, para

   a) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (2,-1,2)$.
   b) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (1,0,1)$.
   c) $v_1 = (1,0,3)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,0,0)$.

Ejercicio 1.6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T_A(v) = A\,v.$$

En cada ítem siguiente, determinar la matriz A cumpliendo las condiciones indicadas. Obtener la expresión general de T_A en cada caso.

1. $A\,v$ es el vector cuyas componentes son la suma y la resta de las componentes de v.

2. $A\,v$ es el vector obtenido al proyectar v sobre la recta $y = x$.

3. $A\,v$ es el vector obtenido al proyectar v sobre la recta $x - 2y = 0$.

Ejercicio 1.7. Determinar la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones entre los espacios indicados utilizando la definición general y aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad de las Transformaciones Lineales. Indicar la matriz estandar.

1. De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

   a) Reflexión respecto a la recta $y = -2x$.
   b) Rotación en un ángulo $-\frac{\pi}{3}$.
   c) Proyección sobre la recta $y = -x$.

2. De $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$:

   a) Reflexión respecto del plano $x = y$.
   b) Reflexión respecto del plano $y + z = 0$.

Ejercicio 1.8. Dado el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}.$$

1. Determinar la transformación proyección $p_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de las siguientes maneras:

   a) Hallando una base ortogonal de S y aplicando el Teorema **??**.
   b) Determinando una ortogonal del espacio $S^\perp$, el Teorema **??** y luego aplicar la identidad $v = \mathrm{proy}_S v + \mathrm{proy}_{S^\perp} v$ para hallar la expresión analítica de $p_S = \mathrm{proy}_S$.
   c) Utilizar la matriz de proyección asociada al subespacio S.

2. Hallar la transformación de reflexión o simetría $r_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto al subespacio S de dos formas distintas.

Ejercicio 1.9. Consideremos una función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (0,0,2,1) \\ T(k,0,1) &= (1,0,0,0) \\ T(-2,k,-1) &= (0,-2,0,0) \end{aligned}$$

1. Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que T defina una única transformación lineal (para cada k).

2. Para el caso particular de $k = -1$ hallar la expresión analítica y la matriz estandar de T.

Núcleo e Imagen de una transformación lineal. Inyectividad y sobreyectividad

Ejercicio 1.10. En los casos siguientes, para la transformación lineal f, encontrar bases y sistemas de ecuaciones de los subespacios Nuc$f$ e Img$f$, Nuc$f^{\perp}$ e Img$f^{\perp}$. Comprobar el Teorema de la dimensión. Determinar que transformaciones son inyectivas, sobreyectivas y cuales son isomorfismos.

1. Sea $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada por
$$T(1,0,0,0)=T(0,0,1,0)=(1,0)$$
$$T(0,1,0,0)=(0,0,0,1)=(0,1).$$
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(1,1)=(0,1)$ y $f(1,-1)=(2,1)$.
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ cuya matriz estandar es $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.
4. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ cuya matriz estandar es $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$.
5. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz estandar es $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$.
6. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$cuya matriz es $A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&1\\-5&0&-1\end{pmatrix}$. Determinar, cuando sea posible, $f^{-1}(1,-2,3)$ y $f^{-1}(1,2,3)$.
7. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z,t)=(x+y,y+z,z+t)$
8. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ dada por: $f(x,y,z,t)=(x-y,y-z,z-t,t-x)$.
9. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es la proyección de un vector u sobre el vector $v=(2,-1,1)$.

Ejercicio 1.11. Determinar la transformación de proyección $\mathrm{proy}_S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ y la transformación de reflexión $\mathrm{r}_S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ asociada a cada subespacio definida por $\mathrm{ref}_S(v)=\mathrm{proy}_S v-\mathrm{proy}_{S^{\perp}}v$ en la dirección de subespacio S.

¿Se puede afirmar que Notemos que $\mathrm{ref}_S(v)=2\mathrm{proy}_S(v)-v$?
Hallar Imgproy$_S$, Imgref$_S$, Nucproy$_S$, y Nucref$_S$. Determinar la matriz estandar de proy$_S$ y ref$_S$.

1. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=\alpha(1,2,-1)\right\}$
2. $S=\{(x,y,z):x+y+z=0\}$.

Ejercicio 1.12. Dadas las transformaciones lineales definidas por las condiciones indicadas, determinar la expresión analítica de cada una y su matriz estandar.

1. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ y Nuc$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x-3y+z=0\right\}$.
2. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que Nuc$f=S$ e Img$f=W$, donde $S=\begin{cases}x+y-z&=0\\2x+z&=0\end{cases}$ y $W=\langle(2,-1,0),(0,1,-2)\rangle$
3. $T(L)\subseteq S$, siendo $L=\langle(2,1,2)\rangle$ y $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x-y=0\right\}$.
4. $T(S)=D$, siendo $S=\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$ y $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x-y+z=0\right\}$.
5. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que Img$f=\langle(1,0,1)\rangle$ y Nuc$f=\langle(2,1,2),(1,0,1)\rangle$.

6. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}T = S$ y $\text{Img}T = S^\perp$ siendo $S=\langle(1,-1,1),(-1,0,-1),(0,1,0)\rangle$.
7. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}f=\{(x,y,z): x=y=2z\}$. Probar que la imagen de f es un plano que pasa por el origen.
8. Sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}f = S^\perp$ y $f(v)=2v$, para cada $v\in S$, donde $S=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y=0 \text{ y } w=0\right\}$.

Ejercicio 1.13. Dada la transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida como $f(\vec{x})=A\vec{x}$,donde

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&k\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

1. Determinar si existen valores $k\in\mathbb{R}$ tales que T sea un monomorfismo. Para los valores encontrados de k, determinar el núcleo y la imagen de f.
2. Para el caso $k=1$, hallar el núcleo y la imagen de f, y una base para cada uno de estos subespacios.

Ejercicio 1.14. Sea la tranformación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz estandar es

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\-3&k&1&0\\-1&2&0&0\end{pmatrix}.$$

Determinar, si existen , los valores de $k\in\mathbb{R}$, tal que:

1. $\text{rg}(A)=2$.
2. f sea un monomorfismo.

Ejercicio 1.15. Estudiar si las siguiente transformaciones admiten inversa. En los casos posibles encuentre la expresión analítica de la transformación inversa.

1. $f(x,y)=(x+2y,-x+y)$
2. $f(x,y,z)=(x-z,2y,x+2z)$
3. $f(x,y,z)=(3x+4y+z,2x+5y+3z,x+2y+z)$

Matriz de transformación

Ejercicio 1.16. Dada la transformación lineal $t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz estandar es

$$[t]=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz $[t]_B$, donde

1. $B=\{(1,2,1),(3,1,2),(2,1,2)\}$.
2. $B=\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3\}$.
3. Hallar $t(0,2,3)$ en ambas matrices.
4. Hallar la expresión analítica.

Ejercicio 1.17. Consideremos una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. Determinar la forma analítica de T, y la matriz de T con respecto a la base $B=\{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$.

Ejercicio 1.18. Determine en cada caso la matriz de la transformación T indicada

1. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y)=(2x-y,y-x)$ y consideremos la base $B=\{(1,-1),(0,1)\}$.

    a) Hallar $[T]_{EB}$.

    b) Hallar $[T]_B$.

    c) Determinar $T(2,3)$ en forma directa y utilizando las matrices de transformación de los ítems anteriores.

2. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definida por

$$T(x,y,z)=(x+y+z,x-y+2z,3y-z),$$

   y consideremos la base $B=\{(1,1,0),(1,-1,1),(2,1,0)\}$.

    a) Hallar las matrices $[T]_{BE}$, $[T]_B$ y $[T]_{EB}$.

    b) Determinar $T(1,2,-1)$ en forma directa y utilizando la matriz de transformacion $[T]_{BE}$.

Ejercicio 1.19. Dadas las bases

$$B=\{(1,-1),(2,1)\} \text{ y } B'=\{(1,1),(0,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$, y

$$[T]_B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz de la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ en la base B, hallar la matriz de T con respecto a B'. Además, hallar $[v]_B$, $[T(v)]_B$ y $[T(v)]_{B'}$ para el vector v cuya matriz de coordenadas es $[v]_{B'}=(-3,1)^t$.

Ejercicio 1.20. Dada la transformación $T(x,y)=(x+y,2y+3x)$, y las bases $B_1=\{(-1,1),(0,1)\}$ y $B_2=\{(-2,1),(1,1)\}$.

1. Determinar la matriz estandar.

2. Determinar la matriz de transformación $[T]_{B_1B_2}$.

3. Calcular la imagen del vector $v=(-1,1)$ primero utilizando directamente la transformación y después utilizando la matriz $[T]_{B_1B_2}$.

4. Hallar $[v]_{B_1}$, $[T(v)]_{B_1}$ y $[T(v)]_{B_2}$ para el vector v cuya matriz de coordenadas en la base B_2 es $[v]_{B_2}=(-1,2)^t$.

Ejercicio 1.21. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la transformación cuya matriz en las bases $B_1=\{(1,1,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$ y $B_2=\{(1,1,-1),(2,-1,0),(1,0,0)\}$ es

$$[T]_{B_1B_2}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Determinar $a\in\mathbb{R}$ tal que $T(1,2,3)=(4,2,1)$. Para el valor de a encontrado el núcleo, y la imagen.

Ejercicio 1.22. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal. ¿Es posible hallar la matriz estandar de T (la matriz respecto a las bases canónicas) sabiendo que

$$\begin{aligned} T(1,1,-1) &= e_1+e_3 \\ T(0,-1,1) &= e_1+e_2-e_3 \\ T(2,1,2) &= -e_1+e_2-2e_3 \end{aligned}$$

donde $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ es la base canónica?

Ejercicio 1.23. Consideremos las bases $B_1 = \{(-1,1),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(-2,1),(1,1)\}$ y la matriz

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

de una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en la base B_1 .

1. Determinar la matrices cambio de base $P_{B_1B_2}$ y $P_{B_2B_1}$.

2. Hallar $[v]_{B_1}$ y $[T(v)]_{B_2}$, donde $[v]_{B_2} = (-1,2)^t$.

3. Determine la matriz estandar, es decir, la matriz de T respecto a la base canónica. Halle la expresión analítica de T.

Ejercicio 1.24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f(x,y) = (x-y, 0, 2y-x)$ y consideremos la base $B_2 = \{(0,1,0),(1,1,0),(0,0,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determinar una base B_1 de $\mathbb{R}^2$ tal que $[f]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.25. Consideremos la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en las bases $E = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,0,0),(1,1,1),(0,0,1)\}$ es

$$[T]_{EB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar la expresión analítica de T y hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (2,1,0)$.

Ejercicio 1.26. Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base y sea

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar si la transformación es un monomorfismo.

2. Si $w = 2v_1 + 3v_2 - v_3$, hallar $[T(w)]_B$.

3. Si $B = \{(1,1,0),(1,2,0),(2,0,0)\}$ y E es la base canónica, determinar $[T]_{BE}$.

Ejercicio 1.27. Consideremos una transformación lineal $t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que su matriz estandar es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & a & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Estudiar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{rg}A = 2$

2. T inyectiva

Ejercicio 1.28. Dado el subespacio $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$, determinar una base B de $\mathbb{R}^3$ que sea la unión de una base de S con una base de $S^{\perp}$, y aplicar el Teorema 1.3 para encontrar la transformación de la proyección y la reflexión respecto del plano S. Hallar la matriz $[\mathrm{proy}_S]_B$ de la transformación en la base encontrada y luego la matriz estandar. Determinar la expresión analítica de la transformación. Comparar el resultado con el resultado del Ejercicio 1.8

Composición de transformaciones

Ejercicio 1.29. Dadas las transformaciones $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definidas por

$$T(x,y,z)=(x-y,x+z)$$

y

$$G(x,y)=(x,y,x-y).$$

Determinar las expresiones analíticas de $T\circ G$ y $G\circ T$. Determine las matrices estandar asociadas y verifique usando las operaciones entre matrices.

Ejercicio 1.30. Consideremos dos transformaciones lineales $T,S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que sus matrices en las bases $B_1=\{(3,7),(1,2)\}$ y $B_2=\{(6,7),(5,6)\}$ son

$$[T]_{B_1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } [S]_{B_2}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Hallar la matriz de la transformación $S\circ T$ en la base canónica.

Ejercicio 1.31. Consideremos las transformaciones lineales $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuyas matrices estandar son $[T]=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ y $[H]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente. Determinar $\mathrm{Nuc}(T\circ H)$, $\mathrm{Img}(T\circ H)$ y $\mathrm{Nuc}(T\circ H^{-1})$.

Ejercicio 1.32. Sea $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz estandar es

$$[T]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar una transformación lineal $G:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nuc}G\neq\mathbb{R}^4$, y $(T\circ G)(v)=(G\circ T)(v)=0$, para todo $v\in\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 1.33. Consideremos el subespacio

$$S=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y-2z+w=0,\, 2x+y-z+4w=0\right\}$$

y la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y-z,-y+2z,x+z,2x+y).$$

Estudiar si posible definir una transformación lineal $G:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ cumpliendo las condiciones $\mathrm{Img}G=S$ y $(T\circ G)(v)=\vec{0}$, para todo $v\in\mathbb{R}^4$.