1.9. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Determinar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que satisfacen las condiciones indicadas

1. $AX+B=BX+A$, $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $3X+A^t=(X^tA)^t$, donde recordemos que A^t es la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 1.2. Recordemos que el ***rango*** de una matriz A es el número de filas no nulas en cualquier forma escalonada por filas.

1. Determinar el rango de las siguientes matrices

$$(a)\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Analizar el rango según los valores de α

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3. Escribir los siguientes sistemas en notación matricial y vectorial. Estudie la compatibilidad de los mismos sistemas y resuelva en los casos posibles. Determine e identifique el conjunto solución.

$$(1)\left\{\begin{aligned} 2x+y-3z &= 5 \\ 3x-2y+2z &= 5 \\ 5x-3y-z &= 16 \end{aligned}\right. \quad (2)\left\{\begin{aligned} 2x_1+3x_3 &= 5 \\ 4x_1-3x_2+7x_3 &= 5 \\ 8x_1-9x_2+15x_3 &= 16 \end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned} x+y+4z &= 2 \\ 2x+5y+20z &= 10 \\ -x+2y+8z &= 4 \end{aligned}\right. \quad (4)\left\{\begin{aligned} 3x-y &= 6 \\ 2x+y-z+3t &= 4 \\ x+3y-2z+6t &= 2 \end{aligned}\right.$$

$$(5)\left\{\begin{aligned} 3x+2y-t &= 5 \\ x-z+2t &= 1 \end{aligned}\right. \quad (6)\left\{\begin{aligned} x+y+z+w &= 0 \\ x+w &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \end{aligned}\right.$$

Ejercicio 1.4. Dadas las matrices siguientes, resolver los sistemas homogéneos asociados. En los casos posibles determinar si las matrices tienen inversa y calcularlas utilizando el método de Gauss.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -‘1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (e)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5. Determinar todos los valores de a para los que el sistema lineal resultante sea compatible, compatible determinado o incompatible

$$(1)\left\{\begin{aligned} x+y-z &= 2 \\ x+2y+z &= 3 \\ x+y+(a^2-5)z &= a \end{aligned}\right. \quad (2)\left\{\begin{aligned} x+y &= 2 \\ y+z &= 2 \\ ax+by+cz &= 0 \end{aligned}\right. \quad (3)\left\{\begin{aligned} 2x-y+z+t &= 2 \\ x+2y-z+4t &= 3 \\ x+7y-4z+11t &= a \end{aligned}\right.$$

Ejercicio 1.6. Consideremos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

1. $x = (2,0,-1)^t$ es solución.
2. $x = (-7,2,2)^t$ es solución.
3. A es inversible.
4. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 1.7. Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

1. Determinar el valor de a para que el rango de la matriz sea 2.
2. Para el valor $a = 1$, determinar la solución del sistema homogéneo asociado.

Ejercicio 1.8. Dada la matriz A y la matriz $\vec{b}$, hallar el valor de α para que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ sea compatible. Resolver el sistema para alguno de los valores hallados

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha-3 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\vec{x} \in \mathrm{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\right\}$ y $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.10. Hallar las condiciones para que un vector arbitrario v cumpla las siguientes condiciones

1. Que sea normal al hiperplano de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,1,1),(1,2,1,2)$, y $(1,3,2,4)$.
2. Que pertenezca al plano hiperplano $S = \langle(1,0,1,1),(0,1,1,2),(1,1,1,0)\rangle$.
3. Que pertenezca al hiperplano generado por los vectores $(1,2,3)$, $(-1,0,-2),(1,-2,1)$.

Ejercicio 1.11. En cada apartado determinar si cada uno de los vectores es combinación de los vectores columna de las matriz dada. Luego estudiar si es posible una condición general que asegure que un vector genérico $\vec{b}$ es combinación lineal de los vectores columna de la matriz A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $v_1 = (2,-1,0)$, $v_2 = (-1,0,1)$.

Ejercicio 1.12. Hallar la solución general de cada sistema $A\vec{x} = \vec{b}$,conociendo la solución particular indicada.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, s = (-2,1,0) \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, s = (1,2,3).$$

Ejercicio 1.13. Dado el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$.

1. ¿Para que valores de k el sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o no existen soluciones ?
2. Determine el conjunto S solución del sistema general y el conjunto solución $\mathrm{N}(A)$ del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

Ejercicio 1.14. Hallar los valores de a y b para que el sistema de ecuaciones que tiene como matriz ampliada a la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ tenga como conjunto solución una recta.

Ejercicio 1.15. Dada la matriz A y la matriz columna $\vec{b}$, en cada caso:

1. Determinar $\mathrm{rg}(A)$, A^{-1} y $\mathrm{rg}(A)$.
2. Usar el ítem anterior para resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.
3. Utilice el ítem anterior para expresar al vector $\vec{b}$ como combinación lineal de las columnas de A.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.16. Determinar un sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ tal que su conjunto solución sea el conjunto indicado

1. $\pi_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = s(-1,2,1) + t(2,-4,-2)\right\}$.
2. $\pi_2 = \langle(-1,0,1),(0,1,2)\rangle + (1,2,2)$.
3. $\pi_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (1,2,3) + s(1,-2,-2) + t(2,0,-1)\right\}$